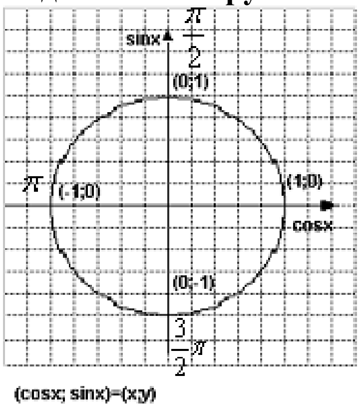
Задание 13. Тригонометрические уравнения

Единичная окружность



Знаки тригонометрических функций

Основные углы

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
ctg α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

Основные тождества и их следствия

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}; \quad \sin^2 x = 1-\cos^2 x$$

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2}; \quad \cos^2 x = 1-\sin^2 x$$

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$tgx \cdot ctgx = 1$$

$$tgx = \frac{1}{ctgx}$$

$$1 + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Формулы двойного аргумента

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x = 2 \cdot \cos^2 x - 1$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Формулы сложения и вычитания аргументов

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta}$$

$$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}$$

Формулы преобразования сумм в произведение

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Формула преобразования в произведение выражения $a\sin\alpha + b\cos\alpha$

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right)$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$cos\varphi\sin\alpha + \sin\varphi\cos\alpha = \sin(\alpha+\varphi)$$

Взаимно обратные функции

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

$$arctg(-x) = -arctgx$$

$$arcctg(-x) = \pi - arcctgx$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\arcsin x) = x \qquad \cos(\arccos x) = x$$

$$\arcsin(\sin x) = x \qquad \arccos(\cos x) = x$$

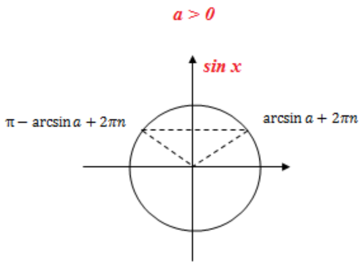
$$x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \qquad x \in [0;\pi]$$

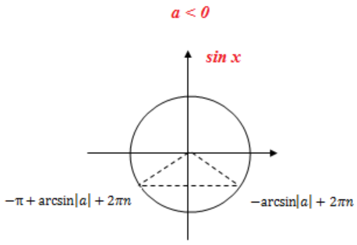
Простейшие тригонометрические уравнения

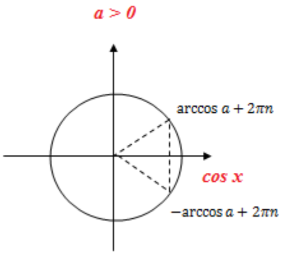
Решение простейших тригонометрических уравнений

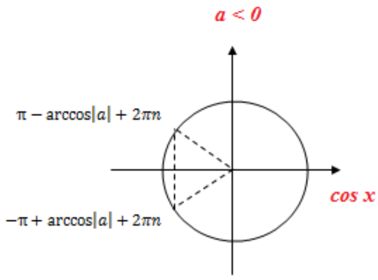
Уравнение	Общее решение	Частные случаи		
		$a=-1$	$a=0$	$a=1$
$\sin x = a$ $\lvert a\rvert \le 1$	$0 \prec a \prec 1$ $x=(-1)^n \arcsin a + \pi n$ $\left[\begin{array}{l} x=\arcsin a + 2\pi n \\ x=\pi - \arcsin a + 2\pi k \end{array}\right.$ $-1 \prec a \prec 0$ $x=(-1)^{n+1}\cdot \arcsin\lvert a\rvert + \pi n$ $\left[\begin{array}{l} x=-\arcsin\lvert a\rvert + 2\pi n \\ x=-\pi + \arcsin\lvert a\rvert + 2\pi k \end{array}\right.$	$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$	$x=\pi n$	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$
$\cos x = a$ $\lvert a\rvert \le 1$	$0 \prec a \prec 1$ $x=\pm\arccos a + 2\pi n$ $-1 \prec a \prec 0$ $x=\pm(\pi - \arccos\lvert a\rvert) + 2\pi n$	$x=\pi+2\pi n$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n$	$x=2\pi n$
$\mathrm{tg}\, x = a$ $a \in (-\infty;\infty)$	$a \succ 0$ $x=\mathrm{arctg}\, a + \pi n$ $a \prec 0$ $x=-arctg\lvert a\rvert + \pi n$	$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$	$x=\pi n$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi n$
$\mathrm{ctg}\, x = a$ $a \in (-\infty;\infty)$	$a \succ 0$ $x=\mathrm{arcctg}\, a + \pi n$ $a \prec 0$ $x=\pi - arcctg\lvert a\rvert + \pi n$	$x=\frac{3\pi}{4}+\pi n$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi n$

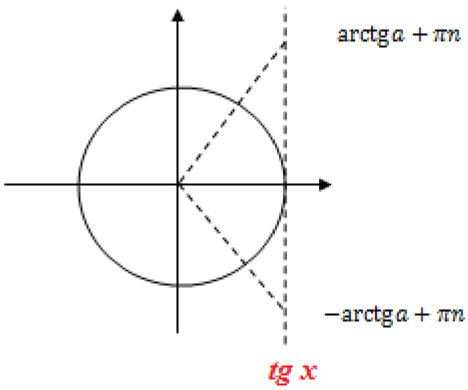
Простейшие тригонометрические уравнения











Методы решения тригонометрических уравнений:

1. Уравнения, однородные относительно $\sin x$ **и** $\cos x$

$$a\sin x + b\cos x = 0,$$

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0 \text{ и т.д.}$$

называется однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$. Сумма показателей степеней у $\sin x$ и $\cos x$ во всех членах такого уравнения одинакова. Эта сумма называется степенью однородного уравнения. Делением на $\cos^n x$, n степень однородного уравнения, оно приводится к уравнению, алгебраическому относительно $\operatorname{tg} x$.

Разделив на $\cos^2 x$, получим уравнение:

$$a\operatorname{tg}^2 x + b\operatorname{tg} x + c = 0.$$

2. Замена переменной $a\operatorname{tg}^2 x + b\operatorname{tg} x + c = 0$

Для замены *sin x* и *cos x* необходимо указать значения для новой переменной, т.е. отрезок [-1; 1].

Ограничений для *tg x* и *ctg x* не существует.

3. Уравнения, левая часть которых раскладывается на множители при помощи <u>вынесения</u> <u>за</u> <u>скобки</u> <u>общего</u> <u>множителя</u> или <u>группировка</u> (4 или 6 одночленов), а правая часть равна нулю

Перенеся все члены любого уравнения в левую часть, его можно привести к виду $f(x) = 0$.

4. Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$ (замена)

$$t = tg\frac{x}{2}, \sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Проверяй подстановкой в уравнение корень $x = \pi + 2\pi \cdot n, n \in Z$

- **Переход к половинному углу**

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} \qquad tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

$$ctg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}} \qquad ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

- **Введение вспомогательного угла**

Уравнение вида $a\sin\alpha + b\cos\alpha = c$,

Разделим обе части этого уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right) = c$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$cos\varphi\sin\alpha + \sin\varphi\cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin(\alpha+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\alpha = (-1)^n \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} - \varphi + \pi n,\ n\in Z$$

$$\varphi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

- **Преобразование произведения в сумму**

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$tg\alpha tg\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)} \quad tg\alpha ctg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$$

$$ctg\alpha ctg\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$$

7. Дробно-рациональные тригонометрические уравнения

Уравнения, содержащие тригонометрические дроби, называются дробно-рациональными уравнениями. В этих уравнениях требуется следить за областью допустимых значений.

8. Иррациональные тригонометрические уравнения

Если в уравнении тригонометрическая функция находится под знаком радикала, то такое тригонометрическое уравнение будет иррациональным. В таких уравнениях следует соблюдать все правила, которыми пользуются при решении обычных иррациональных уравнений (учитывается область допустимых значений, как самого уравнения, так и при освобождении от корня четной степени).

9. Тригонометрические уравнения, в которых под знаком тригонометрической функции находится функция

Эти уравнения требуют дополнительного исследования множества решений.