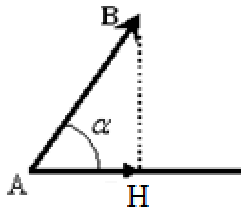
Задание 14. Стереометрия. Координатный и векторный методы

Координатный метод

Определяем координаты точек

$$AH = AB \cdot cos\alpha$$



Прямая

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ *и* $M_2(x_2;y_2;z_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Уравнение прямой по точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ **и направляющему вектору** $\vec{p}=\{m;n;\kappa\}$

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{k}$$

Прямая $\vec{p}$ *– пересечения двух плоскостей*

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$\text{и } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

$$\vec{n}_1=\{A_1;B_1;C_1\}$$

$$\vec{n}_2=\{A_2;B_2;C_2\}$$

-нормальные векторы

$$\vec{p}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\cdot(B_1\cdot C_2-B_2\cdot C_1)+\vec{j}\cdot(C_1\cdot A_2-A_1\cdot C_2)+\vec{k}\cdot(A_1\cdot B_2-A_2\cdot B_1)$$

Расстояние h от прямой $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{k_1}$ **до прямой** $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{k_2}$

Для нахождения расстояния между двумя прямыми необходимо построить плоскость, содержащую одну из прямых и параллельную второй. Тогда искомое расстояние будет равно

расстояние от какой-нибудь точки второй прямой до построенной плоскости.

Угол между двумя прямыми. Пусть даны две прямые $a_1x+в_1y+c_1z+d_1=0$ *и* $a_2x+в_2y+c_2z+d_2=0$. Найти угол $\angle\omega$ между этими прямыми.

$$\vec{n_1}=\{a_1;в_1;c_1\} \text{ и } \vec{n_2}=\{a_2;в_2;c_2\} - \textit{нормальные векторы прямых}$$

$$\cos\omega=\frac{a_1\cdot a_2+в_1\cdot в_2+c_1\cdot c_2}{\sqrt{a_1^2+в_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+в_2^2+c_2^2}}=\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}$$

$$|\vec{n_1}|=\sqrt{a_1^2+в_1^2+c_1^2} - \textit{длина вектора}$$

Расстояние от точки до прямой можно найти через площади треугольников с одной стороны площадь можно найти через формулу $S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot \sin\alpha$, а с другой стороны через формулу $S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a$. Затем приравнять площади и найти высоту (перпендикуляр) от точки до прямой.

Плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0 - \textit{уравнение плоскости}$$

$$\vec{a} = \{A; B; C\} - \textit{нормальный вектор плоскости}$$

Уравнение плоскости $\mathbf{O_{x\,y}}$ имеет вид: **z=0**

Уравнение плоскости $\mathbf{O_{x\,z}}$ имеет вид: **y=0**

Уравнение плоскости $\mathbf{O_{y\,z}}$ имеет вид: **x=0**

Уравнение плоскости по точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и нормальному вектору $\vec{n} = \{A; B; C\}$.

$$A\cdot(x - x_0) + B\cdot(y - y_0) + C\cdot(z - z_0) = 0$$

Уравнение плоскости по трем точкам $M_1(x_1; y_1; z_1)$ *и* $M_2(x_2; y_2; z_2)$ *и* $M_3(x_3; y_3; z_3)$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} &(x - x_1)\cdot(y_2 - y_1)\cdot(z_3 - z_1) + \\ &+ (x_2 - x_1)\cdot(y_3 - y_1)\cdot(z - z_1) + \\ &+ (x_3 - x_1)\cdot(y - y_1)\cdot(z_2 - z_1) - \\ &- (x_3 - x_1)\cdot(y_2 - y_1)\cdot(z - z_1) - \\ &- (x - x_1)\cdot(y_3 - y_1)\cdot(z_2 - z_1) - \\ &- (x_2 - x_1)\cdot(y - y_1)\cdot(z_3 - z_2) = 0 \end{aligned}$$

Если A(a;0;0),B(0;*в*;0),C(0;0;c),то уравнение плоскости имеет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{в} + \frac{z}{c} = 1$$

Уравнение плоскости по одной точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и двум векторам, коллинеарным плоскости $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Угол ($\angle\varphi$) между двумя плоскостями: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ *и* $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$$\left.\begin{aligned} \vec{n}_1 &= \{A_1; B_1; C_1\} \\ \vec{n}_2 &= \{A_2; B_2; C_2\} \end{aligned}\right\} \text{-нормальные векторы}$$

$$cos\varphi = \cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = \frac{|\ A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C\ |_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}$$

$\circ$ *если* $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0,$ *то плоскости перпендикулярны*

$\circ$ *если* $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, *то плоскости параллельны*

Расстояние d-расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ **до плоскости** $Ax + By + Cz + D = 0$.

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Также расстояние от точки до плоскости можно найти через объем пирамиды, где перпендикуляром от точки до плоскости является высота пирамиды.

$$V_{пирамиды} = \frac{1}{3} \cdot S_{основания} \cdot h$$

Угол между прямой $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}$ **и плоскостью** $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\sin\varphi = \frac{A \cdot m + B \cdot n + C \cdot k}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + k^2}}$$

Векторная алгебра

Определение. Векторы называются *равными*, если они сонаправлены и их длины равны.

Определение. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{в}$ коллинеарные и $\vec{a} \neq 0$, то существует число $к$ такое, что $\vec{в} = к \cdot \vec{a}$

Определение. Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{в}$, т.е. представить в виде $\vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{в}$, где $x, y -$ некоторые числа,
то векторы $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c} -$ компланарны.

Пусть $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ – точки пространства, тогда вектор
$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$
Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.

- $C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$ – середина AB
- Точка О делит отрезок AB в отношении AO : OB = k, тогда координаты точки

$O\left(\frac{x_1 + kx_2}{k + 1}, \frac{y_1 + ky_2}{k + 1}, \frac{z_1 + kz_2}{k + 1}\right)$

- $d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ -расстояние между двумя точками A и B.

$\vec{a} = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} + z_1 \cdot \vec{k} = (x_1, y_1, z_1),$
$\vec{b} = x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} + z_2 \cdot \vec{k} = (x_2, y_2, z_2)$
$k - число$

Свойства вектора:

- $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} - \textit{длина вектора } \vec{a}$
- $\vec{a} \pm \vec{в} = \left(x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2\right)$
- $k \cdot \vec{a} = \left(k \cdot x_1, k \cdot y_1, k \cdot z_1\right)$

Скалярное произведение

$$\vec{a} \cdot \vec{в} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{в}\right| \cdot \cos\left(\vec{a}, \vec{в}\right)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{в} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{в} = \vec{в} \cdot \vec{a}$$

Итог скалярного произведения – число

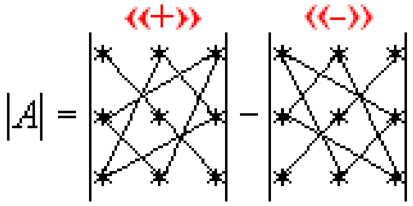
$$\textit{Если } \vec{a} \perp \vec{в}, \textit{то } \vec{a} \cdot \vec{в} = 0, \textit{т.к. } \cos(\vec{a}, \vec{в}) = 0$$

Определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Правило треугольников (Сарриос)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$