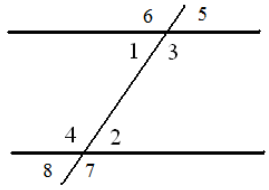
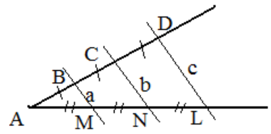
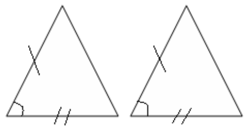
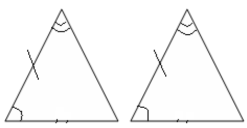
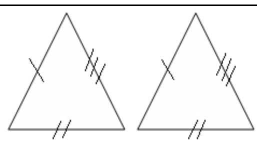
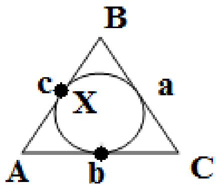
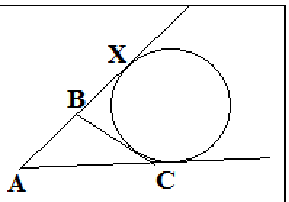
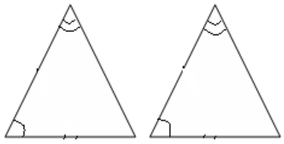
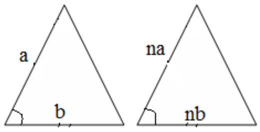
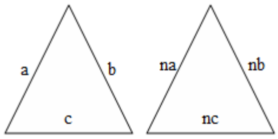
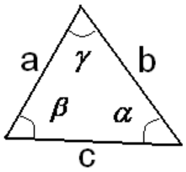
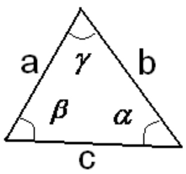
Задание 16. Планиметрия

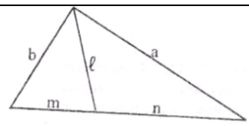
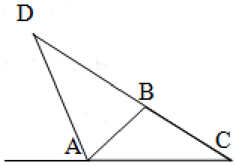
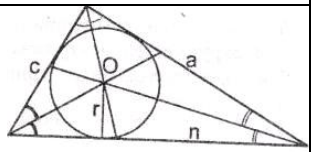
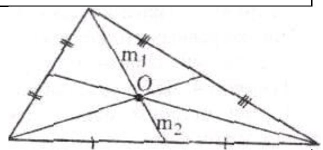
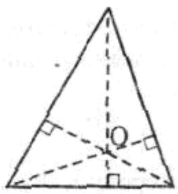
Угловые соотношения в плоских фигурах

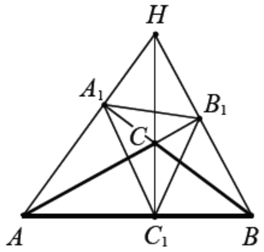
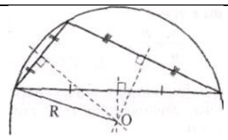
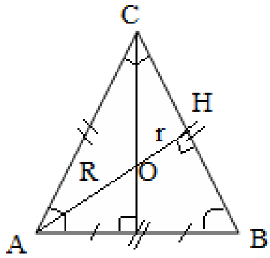
Теорема. Две прямые, параллельные третьей, параллельны.	
Теорема. Если две прямые параллельности пересечены секущей, то 1. Накрест лежащие углы равны; 2. Соответственные углы равны; 3. Сумма внутренних односторонних углов равна 180^0. $\angle 1$ *и* $\angle 2, \angle 3$*и*$\angle 4 -$ *внутренние накрест лежащие* $\angle 2$ *и* $\angle 3, \angle 1$*и*$\angle 4 -$ *внутренние односторонние углы* $\angle 5$ *и* $\angle 2, \angle 1$*и*$\angle 8 -$ *соответсвенные углы*	
Теорема. Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны или соответственные углы равны или сумма внутренних односторонних углов равна 180^0, то прямые параллельны.	
Теорема Фалеса. Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой стороне (параллельные прямые, пересекающие две данные прямые и отсекающие на одной прямой равные отрезки, отсекают равные отрезки и на другой прямой).	 $a \Vert b \Vert c \Rightarrow AB = BC = CD$ $AM = MN = NL$

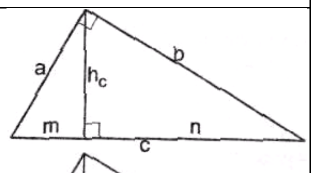
Треугольники

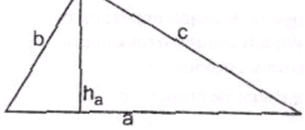
Признаки равенства треугольников: Два треугольника равны между собой, если: 1. Две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого; 2. Сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим углам другого. 3. Три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого.	  
Теорема. В треугольнике со сторонами *a, b, c* расстояние от вершины А до точек касания вписанной окружности сторон, содержащих эту вершину, равно $AX = p - a = \dfrac{b + c - a}{2}$	

Теорема. Пусть окружность касается стороны BC треугольника ABC и продолжений сторон AB и AC. Тогда расстояние от вершины A до точки касания окружности с прямой AB равно полупериметру треугольника ABC. $AX = \dfrac{AB + AC + BC}{2}$	
Подобие треугольников Два треугольника подобны, если: 1. Два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника; 2. Две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы образованные этими сторонами равны; 3. Стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника. **Теорема.** Отношение периметров двух подобных треугольников равно отношению сходственных сторон (коэффициенту подобия). **Теорема.** Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия. **Теорема.** Если у двух треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания. **Теорема.** Если у двух треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания. **Теорема.** Пусть в треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 . Тогда треугольник $A_1 BC_1$ подобен данному с коэффициентом подобия, равным $\lvert\cos B\rvert$.	   $\dfrac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = n$ $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = n^2$
Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов**.** $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$ *R*- радиус описанной окружности	
Теорема косинусов. $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha,$ $\alpha - \textit{угол между } b \textit{ и } c$	
Биссектриса делит угол пополам. **Теорема.** *Биссектриса* внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные	

сторонам, прилежащим к углу. $$\frac{m}{n}=\frac{b}{a}$$ **Теорема.** Биссектриса AD внешнего угла при вершине A треугольника ABC пересекает прямую BC в точке D, что $$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$	 
Теорема. *Биссектрисы* внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке - центре *вписанной* в треугольник *окружности.* **Зависимость между сторонами и высотами:** $$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$ **Зависимость между высотами и радиусом вписанной окружности:** $$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$$ **Теорема.** $S = r \cdot p = \frac{r}{2} \cdot (a+b+c)$ $a+b+c=2p$ — периметр, $\frac{a+b+c}{2}=p$ — полупериметр. r - радиус вписанной окружности	
Медиана – отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны. **Теорема.** *Медианы* треугольника пересекаются в одной точке - центре тяжести треугольника. Центр тяжести делит медианы в отношении 2:1, считая от вершины. $$\frac{m_1}{m_2}=\frac{2}{1}$$ **Теорема.** Медиана треугольника разбивает его на два равновеликих треугольника.	
Высота – перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону. **Теорема.** *Высоты* треугольника пересекаются в одной точке – ортоцентре треугольника. **Теорема.** Высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами его ортотреугольника (треугольник, образованный основаниями высот).	

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Теорема. Серединные перпендикуляры сторон треугольника пересекаются в одной точке – центре описанной окружности.
Теорема. $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$
R – радиус описанной окружности
O – центр.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Правильный треугольник
(равносторонний)
Правильный треугольник – это треугольник, у которого все стороны равны и все углы по 60^0.
Теорема. Для равностороннего треугольника центры вписанной и описанной окружностей, центр тяжести и ортоцентр совпадают.
R – радиус описанной окружности около правильного треугольника со стороной a.
r – радиус вписанной окружности около правильного треугольника со стороной a.
$R = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \qquad r = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$
$a = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3}$
$AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$
$S = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$</td>
<td>

OA=R, OH=r</td>
</tr>
<tr>
<td>Прямоугольный треугольник
Теорема. Высота, опущенная из вершины прямого угла треугольника на гипотенузу, есть среднее геометрическое отрезков, на которые делится каждый катет.
$h_c = \sqrt{m \cdot n}\,,\ h_c^{\ 2} = m \cdot n$
Теорема. Катет равен среднему пропорциональному между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.
$a^2 = c \cdot m, \quad b^2 = c \cdot n$
Теорема. Напротив угла в 30^0 лежит катет равный половине гипотенузы.
Соотношение между сторонами и углами</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

прямоугольного треугольника

$\sin$ - отношение между противолежащим катетом и гипотенузой;

$\cos$ - отношение между прилежащим катетом и гипотенузой;

tg - отношение между противолежащим и прилежащим катетами;

ctg - отношение между прилежащим и противолежащим катетами.

Теорема Пифагора. Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

где a,b - катеты, c - гипотенуза.

Теорема. Центр описанной вокруг прямоугольного треугольника окружности лежит на середине гипотенузы.

$$R = \frac{a}{2},\ a \text{ - гипотенуза}$$

Теорема. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен $r = \dfrac{b+c-a}{2}$, a - гипотенуза, b, c - катеты

Теорема. Медиана, проведенная из вершины прямого угла равна половине гипотенузы.

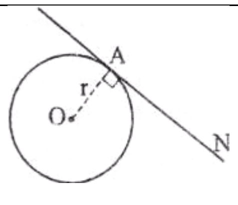
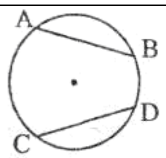
Подобие прямоугольного треугольника

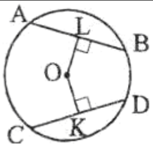
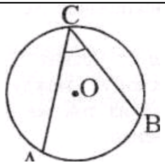
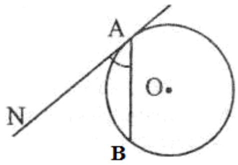
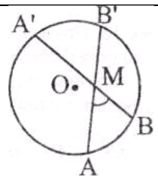
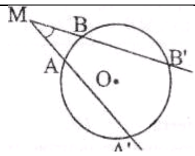
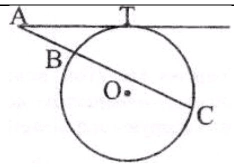
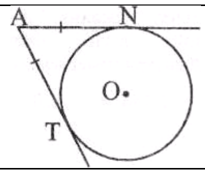
Теорема. Прямоугольные треугольники подобны, если у них по равному острому углу.

Волшебные стороны

Катет	Катет	Гипотенуза
3	4	5
5	12	13
6	8	10
10	24	26

Окружность

Теорема. Прямая, проходящая через точку окружности, тогда и только тогда касается окружности, когда она перпендикулярная к радиусу, проведенному в эту точку. $OA \perp AN \Rightarrow AN -$ касательная.	
Теорема. Равные хорды стягивают равные дуги и обратно. $AB = CD \Leftrightarrow \cup AB = \cup CD$	

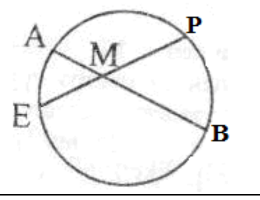
Теорема. Хорды, равноотстоящие от центра, равны, и наоборот. $OL = OK \Leftrightarrow AB = CD$	
Теорема. Угол, вписанный в окружность, измеряется половиной дуги, на которую он опирается. $\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AB$ *Следствие.* Угол, опирающийся на диаметр - прямой.	
Теорема. Угол между касательной и секущей, проходящей через точку касания, измеряется половиной дуги окружности, лежащей внутри измеряемого угла. $\angle BAN = \frac{1}{2} \cup AB$	
Теорема. Угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой дуги AB и *A'B',* лежащих соответственно внутри данного угла и угла с ним вертикального. $\angle AMB = \frac{1}{2} \cdot \left(\cup AB + \cup A'B'\right)$ В частности, если т. M совпадает с т.O, то $\angle AMB = \cup AB$	
Теорема. Угол, образованный двумя секущими, проведенными из внешней точки, измеряется полуразностью дуг и A'B' и AB, лежащих внутри его. $\angle AMB = \frac{1}{2} \cdot \left(\cup A'B' - \cup AB\right)$	
Теорема. Произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной или касательная равна среднему геометрическому между секущей, проведенной из той же точки, и ее внешней частью. *Следствие.* Для любой секущей, проведенной через данную точку *A,* произведение ее длины на внешнюю часть постоянно: *AC • AB = C(const).*	 $AT^2 = AC \cdot AB$ $AT = \sqrt{AC \cdot AB}$
Теорема. Две касательные к окружности, проведенные из одной точки, равны между собой: **AN=AT**	

<table>
<tr>
<td>

Теорема. Если через точку (т. *M,* см. рис.), взятую внутри круга, проведено сколько угодно хорд *(AB, AP,* ...), то произведение отрезков каждой хорды есть число постоянное для всех хорд.

AM•MB = EM•MP=...=const

</td>
<td>

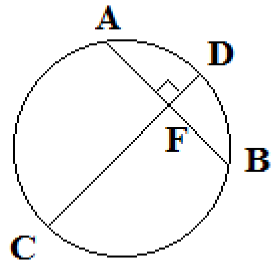


</td>
</tr>
<tr>
<td>

Теорема. Радиус (диаметр) CD, перпендикулярный хорде AB, делит хорду пополам.

$CD \perp AB \Rightarrow AF = FB$

</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>

Теорема. При любом способе касания точка касания и центры окружностей лежат на одной прямой.

Теорема. При внешнем касании центры окружностей расположены на линии

центров по разные стороны от точки касания, при внутреннем – по одну сторону.

Теорема. Расстояние между центрами касающихся окружностей радиусов R и

r (r ≤R) равно R + r при внешнем касании и R - r при внутреннем.

Теорема. Центр окружности, описанной

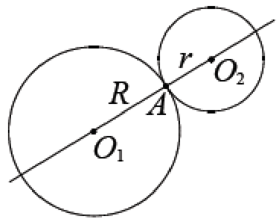
около трапеции, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам трапеции.

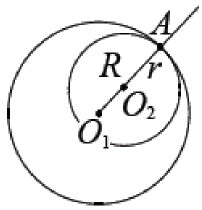
Теорема. Пересекающиеся окружности в точках A и B имеют общую хорду AB.

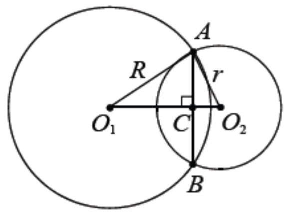
Теорема. Общая хорда перпендикулярна линии центров и делится ею пополам.

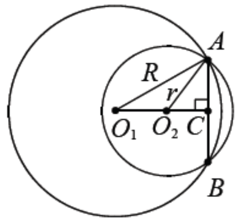
Теорема. Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен $2\sqrt{Rr}$.

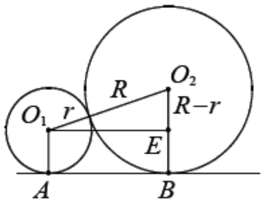
</td>
<td>





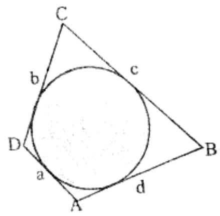
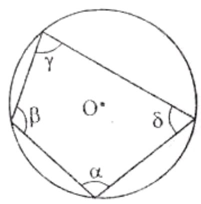
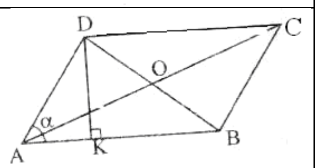
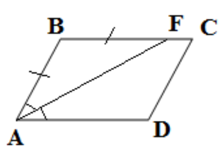


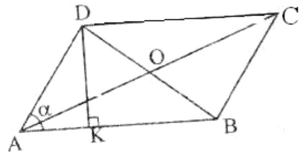
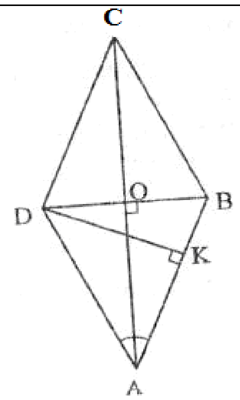
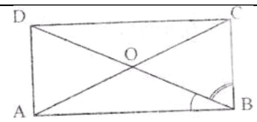
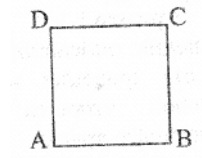
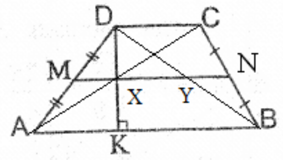




</td>
</tr>
</table>

Многоугольники

Теорема. Сумма внутренних углов выпуклого n - угольника равна $180° \cdot (n-2)$.	
Правильный многоугольник	
Теорема. Каждый угол правильного n – угольника равен $\alpha_n = \frac{180°\,(n-2)}{n}$. **Теорема.** Окружность, вписанная в правильный n – угольник, касается всех сторон n – угольника в их серединах. **Теорема.** Центр окружности, описанной около правильного n – угольника совпадает с центром окружности, вписанной в тот же n – угольник. **Теорема.** Длина стороны правильного n – угольника, вписанного в окружность радиуса R равна $a = 2R \cdot sin\frac{180°}{n}$. **Теорема.** Длина стороны правильного n – угольника, описанного около окружности радиуса r равна $a = 2r \cdot tg\frac{180°}{n}$.	
Четырехугольники	
Диагонали $AC=d_1$, $OB=d_2$, $O_1O_2=m$ (O_1 и O_2 — середины диагоналей), то справедливы : **Теорема.** Для всякого выпуклого четырехугольника $a^2+b^2+c^2+d^2=d_1^2+d_2^2+4\cdot m^2$	
Теорема. В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда когда, a + c = b + d	
Теорема. Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда $\alpha+\gamma=\beta+\delta$	
Параллелограмм **Теорема.** Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. **Теорема.** У параллелограмма противолежащие стороны равны, противолежащие углы равны. **Теорема.** Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник. $\angle BAF = \angle FAD \Rightarrow AB = BF$	

Теорема. Диагональ параллелограмма разбивает его на два равновеликих треугольника. $S_{ADC}=S_{ACB}$ $S_{ADB}=S_{BDC}$ **<u>Формулы:</u>** $S=DK\cdot AB=AD\cdot AB\cdot\sin\alpha$ $AC^2+BD^2=2\cdot\left(AB^2+AD^2\right)$	
Ромб **Определение.** Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны. **Теорема**. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов. **<u>Формулы:</u>** $AC^2+BD^2=4\cdot AD^2$ $S=AD^2\cdot\sin\angle A=AD\cdot DK=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot AC$ Заметим, что ромб – параллелограмм, поэтому свойства параллелограмма сохраняются.	
Прямоугольник **Определение.** Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые. **Теорема.** Диагонали прямоугольника равны. **<u>Формулы:</u>** $S=AB\cdot AD$ **Посмотри!!!** Прямоугольник - это параллелограмм, поэтому свойства параллелограмма сохраняются.	
Квадрат **Определение.** Квадрат - частный случай прямоугольника. **Свойства квадрата:** • все стороны равны; • все углы прямые; • диагонали равны и пересекаются под прямым углом и являются биссектрисами его углов. **<u>Формулы:</u>** $S=AB^2=\frac{1}{2}\cdot AC^2$	
Трапеция **Определение.** Трапецией называется четырехугольник, у которого только две противолежащие стороны параллельны. где *MN — средняя линия* трапеции; **Определение.** Если у трапеции боковые стороны равны, то такая трапеция	

называется *равнобочной (равнобедренной).* **Теорема.** Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме. $$MN = \frac{AB + DC}{2}$$ **Теорема.** Середина диагоналей трапеции параллельна основаниям и равна их полуразности. $$XY = \frac{AB - DC}{2}$$ **Теорема.** Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на большее основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали – полусумме оснований (средней линии). $AK = \frac{AB - DC}{2}$ $BK = \frac{AB - DC}{2}$ **Теорема.** Трапеция разбивается диагоналями на два равновеликих треугольника (примыкающих к боковым сторонам $S_{ADF} = S_{BFC}$) и два подобных треугольника (примыкающих к основаниям ΔAFB *и* ΔDFC). **Теорема.** Трапеция вписана в некоторую окружность тогда и только тогда, когда она является равнобедренной. **<u>Формулы:</u>** $S = \frac{1}{2} \cdot DK \cdot (AB + DC) = MN \cdot DK$