Задание 18. Задачи с параметром

Линейное уравнение $a \cdot x = b$ имеет:

- единственное решение, при $a \neq 0$;
- бесконечное множество решений, при $a = 0, b = 0$;
- не имеет решений, при $a = 0, b \neq 0$.

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет:

- два различных корня тогда и только тогда, когда $D \succ 0$.
- два (может быть кратных) корня тогда и только тогда, когда $D \geq 0$.
- два положительных корня тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_1 x_2 > 0, \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 4ac > 0, \\ \dfrac{c}{a} > 0, \\ -\dfrac{b}{a} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D > 0, \\ a \cdot f(0) > 0, \\ x_в > 0; \end{cases}$$

- два отрицательных корня тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_1 x_2 > 0, \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 4ac > 0, \\ \dfrac{c}{a} > 0, \\ -\dfrac{b}{a} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D > 0, \\ a \cdot f(0) > 0, \\ x_в < 0; \end{cases}$$

- корни разных знаков тогда и только тогда, когда

$$x_1 x_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow a \cdot f(0) < 0;$$

- корень, равный нулю тогда и только тогда, когда

$$x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow c = 0;$$

- два разных корня $x_1, x_2 > M$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0, \\ a \cdot f(M) > 0, \\ x_в > M; \end{cases}$$

- два разных корня $x_1,\ x_2 < M$ тогда и только тогда, когда
$$\begin{cases} D > 0, \\ a \cdot f(M) > 0, \\ x_в < M; \end{cases}$$
- два корня $x_1 < M < x_2$ тогда и только тогда, когда $a \cdot f(M) < 0$;
- корни $x_1 < m < x_2 < M$ тогда и только тогда, когда
$$\begin{cases} a \cdot f(m) < 0, \\ a \cdot f(M) > 0; \end{cases}$$
- корни $m < x_1 < M < x_2$ тогда и только тогда, когда
$$\begin{cases} a \cdot f(m) > 0, \\ a \cdot f(M) < 0; \end{cases}$$
- корни $x_1 < m < M < x_2$ тогда и только тогда, когда
$$\begin{cases} a \cdot f(m) < 0, \\ a \cdot f(M) < 0; \end{cases}$$
- один корень внутри интервала (m, M), а другой вне этого интервала тогда и только тогда, когда $f(m) \cdot f(M) < 0$.

Разложение квадратного трехчлена на линейные множители:
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Теорема Виета

Приведенное квадратное уравнение: $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Частные случаи:

1) Если a+ b+ c = 0, то $x_1 = 1$, $x_2 = c/a$.

2) Если a = b + c, то $x_1 = -1$, $x_2 = -c/a$.

Система уравнений с коэффициентами отличны от нуля имеет:

$$\begin{cases} ax+by=c, \\ a_1x+b_1y=c_1. \end{cases}$$

- единственное решение, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\frac{a}{a_1}\neq\frac{b}{b_1}$$

- бесконечно много решений, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$$

- не имела решений, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}\neq\frac{c}{c_1}$$

Случай, когда коэффициенты равны нулю, нужно рассматривать отдельно.

Неравенства вида $ax \succ b$ с переменной *x:*

1) имеет решение на $x\in\left(\frac{b}{a};+\infty\right)$, при $a\succ 0$;
2) имеет решение на $x\in\left(-\infty;\frac{b}{a}\right)$, при $a\prec 0$;
3) имеет решение на $x\in(-\infty;+\infty)$, при $a=0, b\prec 0$;
4) не имеет решение, при $a=0, b\geq 0$.

Четность и нечетность функции

$f(-x)=f(x)-\text{четная}$. Если функция четная, то корням уравнения будут числа: - *x; 0; x.*

$f(-x)=-f(x)-\text{нечетная}$

Инвариантность

Утверждение 1. Если выражение *f (x)* – инвариантно относительно преобразования *x* → *(-x)* и уравнение *f(x)= 0* имеет корень x_0, то число $-x_0$ также корень этого уравнения.

Утверждение 2. Если выражение F(x; y) инвариантно относительно преобразования x → (- x) и уравнение
F(x; y) = 0 имеет решение (x_0; y_0), то и пара чисел (- x_0;y_0) также решение этого уравнения.

Утверждение 3. Если выражение F(x; y) инвариантно относительно преобразования y → (- y) и уравнение
F(x; y) = 0 имеет решение (x_0; y_0), то и пара чисел (x_0; - y_0), также решение этого уравнения.

Утверждение 4. Если выражение F(x; y) – инвариантно относительно преобразования x → y и y → x и уравнение F(x; y) = 0 имеет решение (x_0; y_0), то пара чисел (y_0;x_0)также решение этого уравнения.

Утверждение 5. Если выражение f (x) – инвариантно относительно преобразования x → g(x) и уравнение f (x) = 0
имеет корень x_0, то число g(x_0) также корень этого уравнения.

Метод оценки

Иногда уравнение (неравенство) $f(x) = g(x)$ (либо любой другой знак неравенства) устроено так, что на всей
ОДЗ неизвестной имеют место неравенства $f(x) \geq A$ и $g(x) \leq A$ при некотором A. В этом случае:

а) решение неравенства $f(x) \leq g(x)$ или уравнения $f(x) = g(x)$ сводится к нахождению тех значений x , для которых одновременно $f(x) = A$ и $g(x) = A$;
б) решение неравенства $f(x) \geq g(x)$ сводится к нахождению тех решений неравенства $f(x) \geq A$, для которых определена функция $g(x)$.

Неотрицательность функции

Пусть левая часть уравнения (неравенства) $f(x) \leq 0$ или $f(x) = 0$ есть сумма нескольких $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$, каждая из которых неотрицательна для любого x из области ее определения. Тогда неравенство $f(x) \leq 0$ или уравнение
$f(x) = 0$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x) = 0. \end{cases}$$

а неравенство $f(x) \geq 0$ сводится к нахождению области определения функции $f(x)$.

Монотонность функции на множестве R

- Если функция $f(t)$ строго монотонна на **R**, то уравнение $f(h(x)) = f(g(x))$ равносильно уравнению $h(x) = g(x)$.
- Если функция $f(t)$ строго возрастает на **R**, то неравенство $f(h(x)) > f(g(x)$ равносильно неравенству $h(x) > g(x)$.
- Если функция $f(t)$ строго убывает на **R**, то неравенство $f(h(x)) > f(g(x))$ равносильно неравенству $h(x) < g(x)$.

Монотонность функции на промежутке

Если функция $f(t)$ строго монотонна на своей области существования – промежутке M, то уравнение $f(h(x)) = f(g(x))$ равносильно системе

$$\begin{cases} h(x) = g(x), \\ E(h) \subset M, \\ E(g) \subset M. \end{cases}$$

Если функция $f(t)$ определена и является возрастающей на своей области определения – промежутке M, то неравенство
$f(h(x)) > f(g(x))$ равносильно системе

$$\begin{cases} h(x) > g(x), \\ E(h) \subset M, \\ E(g) \subset M, \end{cases}$$

где $E(h)$ и $E(g)$ – множество значений функций $h(x)$ и $g(x)$ соответственно.

Если функция $f(t)$ строго убывает на своей области определения – промежутке M, то неравенство

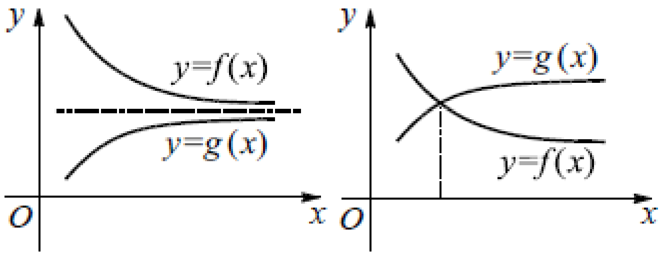
$f(h(x)) > f(g(x))$ равносильно системе

$$\begin{cases} h(x) < g(x), \\ E(h) \subset M, \\ E(g) \subset M, \end{cases}$$

где $E(h)$ и $E(g)$ – множество значений функций $h(x)$ и $g(x)$ соответственно.

Функции разной монотонности

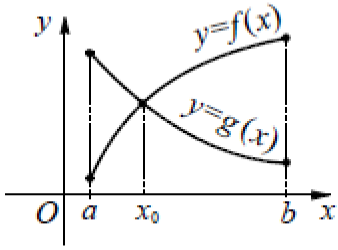
Уравнение $f(x) = g(x)$, где $f(x)$ – возрастающая, а $g(x)$ – убывающая функции, либо не имеет решений (смотри рис. *а*), либо имеет единственное решение (см. рис. *б*).



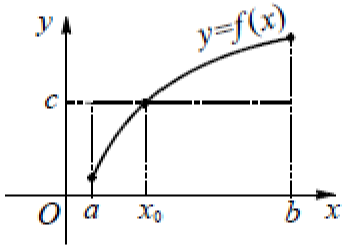
а *б*

Пусть на промежутке $(a; b)$ заданы возрастающая функция $f(x)$ и убывающая функция $g(x)$, причем x_0– корень уравнения $f(x) = g(x)$, принадлежащий промежутку $(a; b)$.

Тогда решение неравенства $f(x) > g(x)$ – все числа из промежутка $(x_0; b)$, а решение неравенства $f(x) < g(x)$ – промежуток $(a; x_0)$ (см.рис.).



Пусть на промежутке $(a; b)$ задана возрастающая функция $f(x)$ и x_0– корень уравнения $f(x) = c$, принадлежащий промежутку $(a; b)$. Тогда решение неравенства $f(x) > c$ – все числа из промежутка $(x_0; b)$, а решение неравенства $f(x) < c$ – промежуток $(a; x_0)$ (см. рис.).



Задачи вида $f(f(x)) = x$

Если функция $f(x)$ строго возрастает на некотором промежутке, то уравнения $f(x) = x$ и $f(f(x)) = x$ равносильны на этом промежутке.

Основные функции

Линейная функция $y = kx+b$ графиком является прямая.

Область определения - $D(y)=R$

Область значения - $E(y)=R$

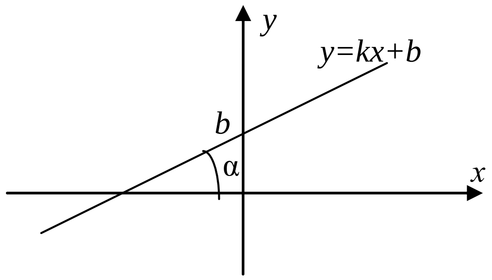
Значение коэффициентов

Коэффициент k является тангенсом угла, который образует прямая с положительным направлением оси абсцисс.

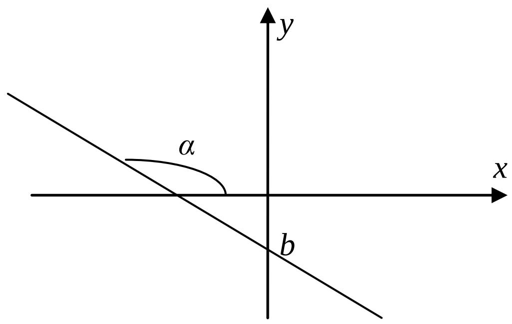
Коэффициент b является показателем ординаты точки пересечения прямой с осью ординат.

Свойства

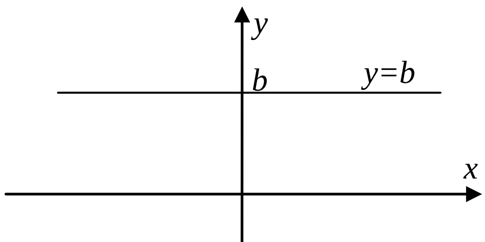
*1)*При $k>0$, прямая образует острый угол с осью абсцисс (α – острый угол), функция является возрастающей.



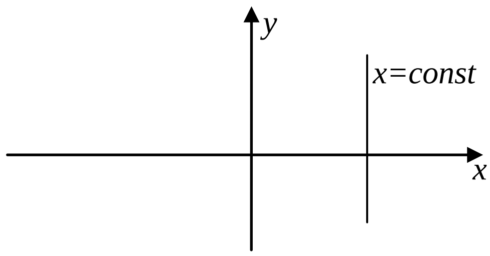
*2)*При $k<0$, прямая образует тупой угол с осью абсцисс (α – тупой угол), функция является убывающей.



*3)*При $k=0$, прямая параллельна оси абсцисс ($y=b$).

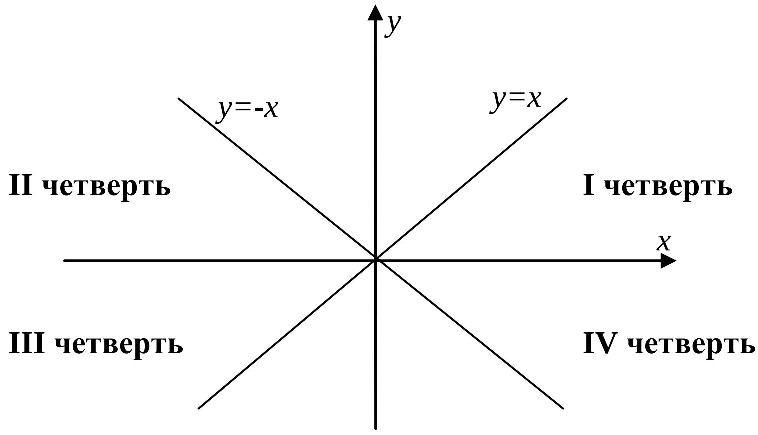


*4)*Прямая $x = const$ параллельна оси ординат ($x=const$).



*5)*Функция прямой пропорциональности $y=kx$ проходит через начало координат если $k>0$, прямая лежит во I и Ш четвертях, функция является возрастающей.

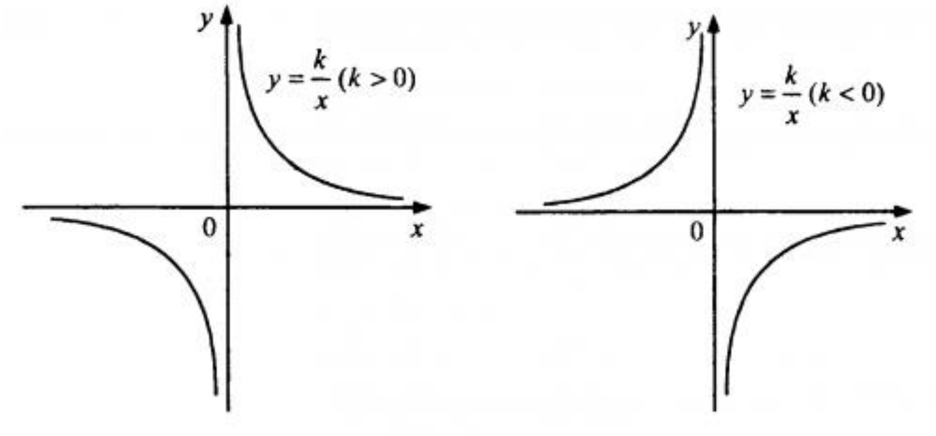
если $k<0$, прямая лежит во II и IV четвертях, функция является убывающей.
если $k=1$, прямая является биссектрисой I и III четвертях.
если $k=-1$, прямая является биссектрисой II и IV четвертях.



Условие параллельности двух прямых $y_1 = k_1x + b_1$ и $y_2 = k_2x + b_2$
Две прямые параллельны, если у них равные коэффициенты $k_1 = k_2$
Условие перпендикулярности двух прямых $y_1 = k_1x + b_1$ и $y_2 = k_2x + b_2$
Две прямые перпендикулярны, если произведение их коэффициентов равно -1, т.е. $k_1 \cdot k_2 = -1$

Функция обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$

Графиком является гипербола
Область определения - $D(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$
Область значения - $E(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$
Функция обратной пропорциональности является нечетной (симметрия относительно начала координат).



Свойства функции
если $k>0$, функция лежит в I и Ш четвертях и является убывающей.
если $k<0$, функция лежит во II и IV четвертях и является возрастающей.

Квадратичная функция $y = ax^2 + вx + c$

Графиком квадратичной функции является парабола.

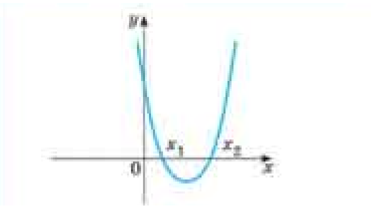
Область определения - $D(y)=R$

Координаты вершины параболы $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = -\frac{D}{4a}$

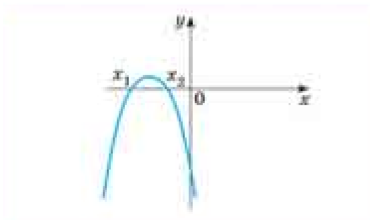
Прямая $x = -\frac{b}{2a}$ является осью симметрии параболы.

При $a>0$ ветви параболы направлены вверх.

При $a<0$ ветви параболы направлены вниз.



$a>0$



$a<0$

Частный случай

$y = x^2$

Область определения - $D(y)=R$

Область значения - $E(y)=[0;+\infty)$

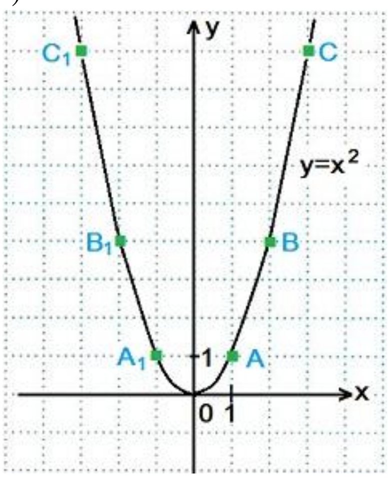
Координаты вершины параболы $x_0 = 0$; $y_0 = 0$

Точка минимума функции $x_{\min} = 0$

Функция является четной (симметрия относительно оси Оу).

Функция возрастает на $x \in (0;+\infty)$

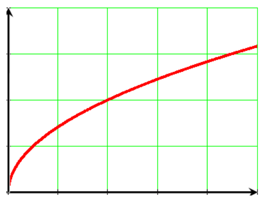
Функция убывает на $x \in (-\infty;0)$



Функция $y = \sqrt{x}$

Область определения - $D(y)=[0;+\infty)$

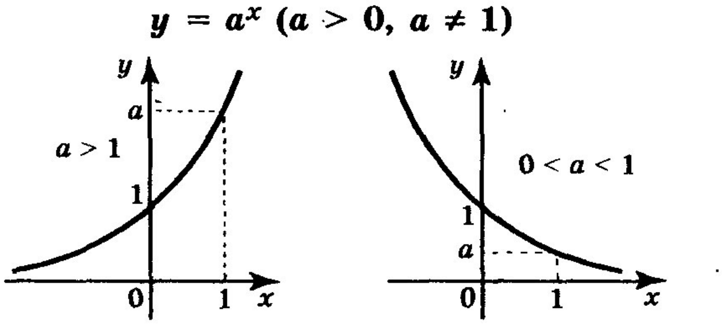
Область значения - $E(y)=[0;+\infty)$



Функция возрастает на $x \in [0;+\infty)$

Показательная функция $y = a^x$

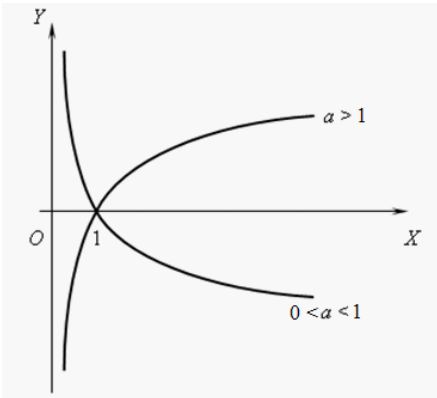
Область определения - $D(y)=R$
Область значения - $E(y)=(0;+\infty)$



если $a>0$, функция возрастающая.
если $a<0$, функция убывающая.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$

Область определения - $D(y)=(0;+\infty)$
Область значения - $E(y)= R$
если $a>0$, функция возрастающая.
если $a<0$, функция убывающая.



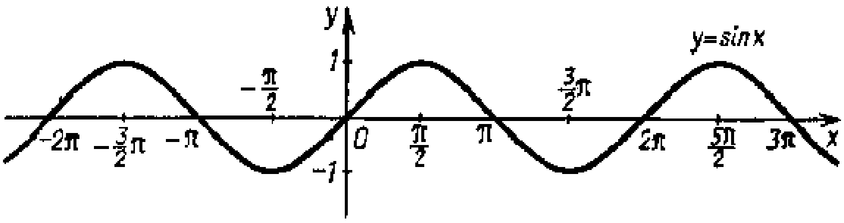
Уравнение окружности

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$
$$\text{где } A_0(a,b)-\text{центр окружности}$$

Тригонометрические функции

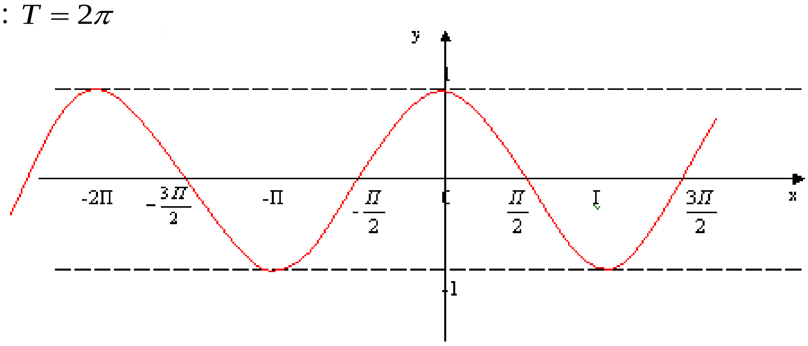
$$y=\sin x$$

Область определения: $D(y)=R$
Область значения: $E(y)=[-1;1]$
Четность: функция нечетная.
Периодичность: $T=2\pi$



$$y=\cos x$$

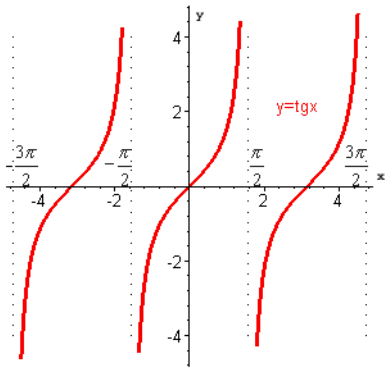
Область определения: $D(y)=R$
Область значения: $E(y)=[-1;1]$
Четность: функция четная.
Периодичность: $T=2\pi$



$$y=tgx$$

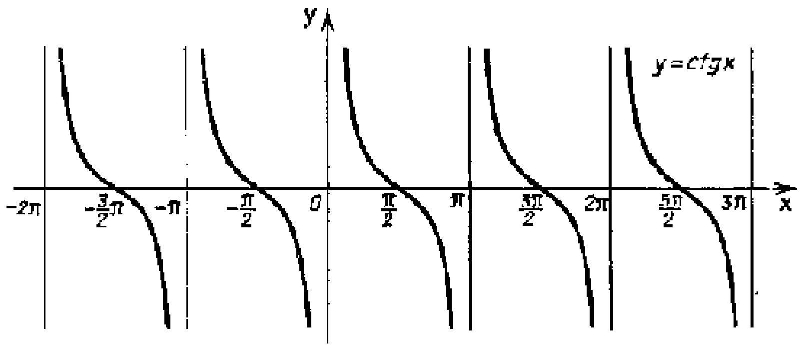
Область определения: $D(y)=\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in Z$

Область значения: $E(y)=R$
Четность: функция нечетная.
Периодичность: $T=\pi$
Возрастающая функция



$$y = ctgx$$

Область определения: $D(y) = (\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in Z$
Область значения: $E(y) = R$
Четность: функция нечетная.
Периодичность: $T = \pi$
Убывающая функция



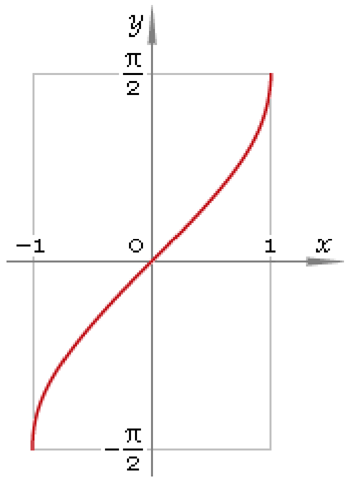
Обратные тригонометрические функции

$$y = \arcsin x$$

Область определения: $D(y) = [-1;1]$

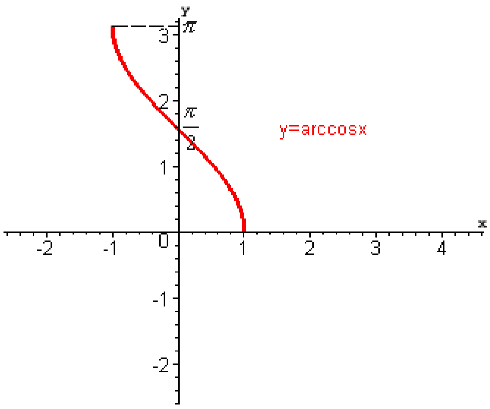
Область значения: $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Четность: функция нечетная
Функция непериодическая
Возрастающая функция



$$y = \arccos x$$

Область определения: $D(y) = [-1;1]$
Область значения: $E(y) = [0;\pi]$
Четность: функция ни нечетная ни четной.
Функция непериодическая
Убывающая функция

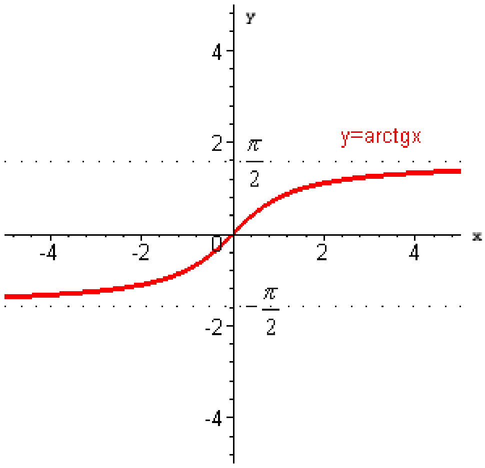


$y = arctgx$

Область определения: $D(y) =$ R

Область значения: $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Четность: функция нечетная
Функция непериодическая
Возрастающая функция

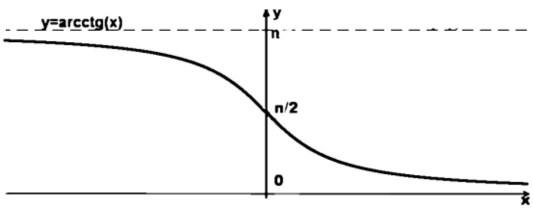


$y = arcctgx$

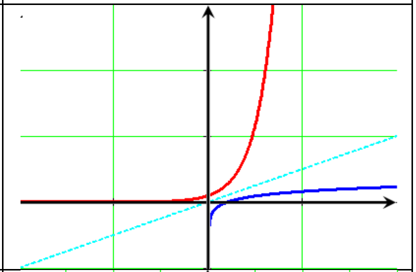
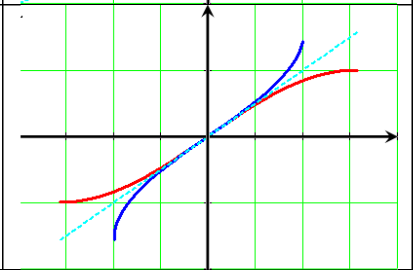
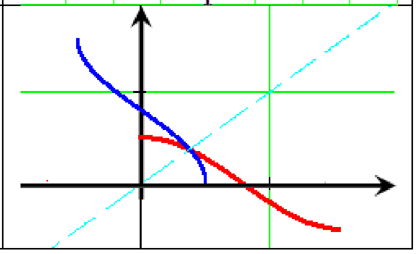
Область определения: $D(y)$=R

Область значения: $E(y) = (0; \pi)$

Четность: функция ни нечетная ни четной.
Функция непериодическая
Убывающая функция



Взаимно обратные функции

Взаимно обратные функции		Графики
$y = a^x, a \succ 1$ $D(y): R$ $E(y): (0;+\infty)$ *возрастающая*	$y = \log_a x, a \succ 1$ $D(y): (0;+\infty)$ $E(y): R$ *возрастающая*	
$y = \sin x$ $D(y): \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $E(y): [-1;1]$ *возрастающая*	$y = \arcsin x$ $D(y): [-1;1]$ $E(y): \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ *возрастающая*	
$y = \cos x$ $D(y): [0; \pi]$ $E(y): [-1;1]$ *убывающая*	$y = \arccos x$ $D(y): [-1;1]$ $E(y): [0; \pi]$ *убывающая*	

Свойства взаимно обратных функций

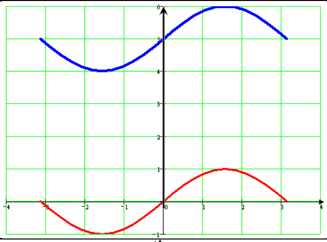
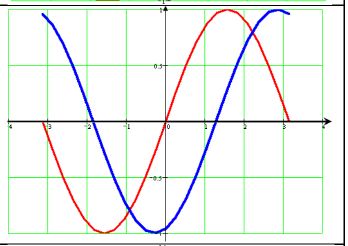
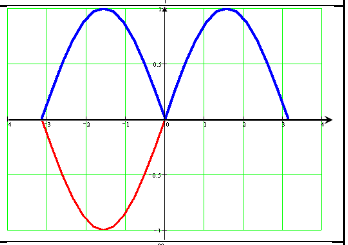
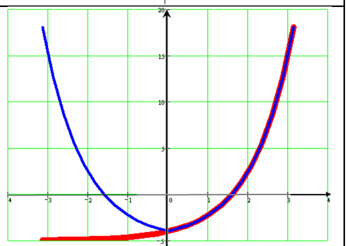
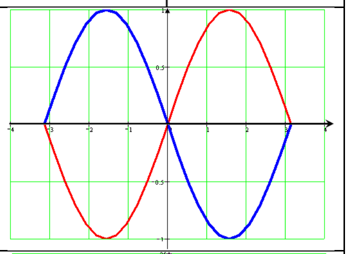
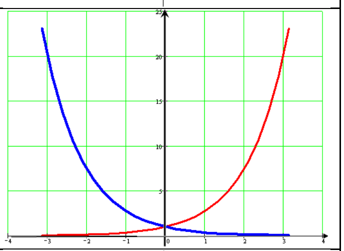
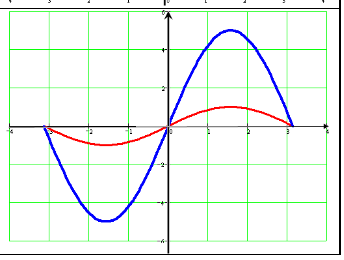
1) *Тождества*. Пусть f и g – взаимно обратные функции. Это означает, что равенства $y = f(x)$ и $x = g(y)$ равносильны. Подставим одно из этих равенств в другое. Получим два тождества $f(g(y)) = y$ и $g(f(x)) = x$.

2) *Область определения*. Пусть f и g – взаимно обратные функции. Область определения функции f совпадает с областью значений функции g, и наоборот, область значений функции f совпадает с область определения функции g.

3) *Монотонность*. Если одна из взаимно обратных функций возрастает (убывает), то и другая возрастает (убывает).

4) *Графики*. Графики взаимно обратных функций, построенные в одной и той же системе координат, симметричны друг другу относительно прямой $y = x$.

Основные операции над функциями

Операция	Действие	График
$f(x)+c$	Движение графика вдоль оси *Oy* на *c*	
$f(x+c)$	Движение графика вдоль оси *Ox* на $-c$	
$\lvert f(x)\rvert$	Положительные значения функции остаются без изменения, а отрицательные значения функции отображаются симметрично относительно оси *Ox*	
$f(\lvert x\rvert)$	Положительные значения *x* отображаются симметрично относительно оси *Oy,* а отрицательные значения *x* удаляются	
$-f(x)$	График функции отображается симметрично относительно оси *Ox*	
$f(-x)$	График функции отображается симметрично относительно оси *Oy*	
$k\cdot f(x)$	Растяжение и сжатие вдоль оси *Oy* (ордината точки увеличивается в *к* раз)	

$f(k \cdot x)$	Растяжение и сжатие вдоль оси *Ox* (абсцисса точки уменьшается в *к* раз)