Задание 5. Уравнения

Областью определения уравнения *f(x) = g(x)* называют множество всех тех значений переменной *x*, при которых и выражение *f(x),* и выражение *g(x)* имеют смысл.

Функция	Условие
$y = \frac{g(x)}{f(x)}$	$f(x) \neq 0$
$y = \sqrt{f(x)}$	$f(x) \geq 0$
$y = \log_{g(x)} f(x)$	$\begin{cases} f(x) \succ 0 \\ g(x) \succ 0 \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$
$y = tg\ f(x)$	$f(x) \neq \pi/2 + \pi m$
$y = \arccos\ f(x)$ $y = \arcsin\ f(x)$	$-1 \leq f(x) \leq 1$

Теоремы о равносильности уравнений

Теорема 1. *Если какой-нибудь член уравнения перенести из одной части уравнения в другую со знаком минус, то получится уравнение, равносильное данному.*

Теорема 2. *Если обе части уравнения возвести в одну нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.*

Теорема 3*. Если обе части уравнения f(x)=g(x) умножить на выражение h(x), которое имеет смысл в ОДЗ уравнения f(x)=g(x) и нигде в этой области не обращается в ноль, то получится уравнение, равносильное данному.*

Теорема 4. *Если обе части уравнения неотрицательны в области определения уравнения, то при возведении обеих частей уравнения в четную степень получится уравнение, равносильное данному.*

Исходное уравнение		Равносильное уравнение (система)
$f(x) = g(x)$	$\Leftrightarrow$	$f(x) + C = g(x) + C$
$f(x) \cdot g(x) = 0$	$\Leftrightarrow$	$\left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{array}\right.$
$\frac{f(x)}{g(x)} = 0$	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$
$f^2(x) + g^2(x) = 0$	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$

Квадратное уравнение

$ax^2 + bx + c = 0$

Дискриминант: $D = b^2 - 4ac$

Если $D \prec 0$, то нет корней $x \in \varnothing$

$D=0$, то существует один корень $x_1=x_2$

$D \succ 0$, то существует два корня $x_1;x_2$

Формула корней: $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

Частные случаи:

$x^2=a$

1. $a \succ 0$, 2 *корня*

   $x_1=\sqrt{a},\ x_2=-\sqrt{a}$

2. $a=0$, 1 *корень*

   $x=0$

3. $a \prec 0$, *нет корней*

Формула для четного коэффициента b.

$$ax^2+bx+c=0$$
$$b=2m$$
$$D_1=m^2-ac$$

- $D_1>0$, $X_{1,2}=\dfrac{-m\pm\sqrt{D_1}}{a}$
- $D1=0$, $X=\dfrac{-m}{a}$
- $D_1<0$, действительных корней нет

Частные случаи:

1) Если $a+b+c=0$, *то* $x_1=1$, $x_2=c/a$.

2) Если $a=b+c$, *то* $x_1=-1$, $x_2=-c/a$.

Разложение квадратного трехчлена на линейные множители:

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Теорема Виета

Приведенное квадратное уравнение: $ax^2+bx+c=0$

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

Рациональные уравнения

$$\frac{p(x)}{q(x)}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p(x)=0 \\ q(x)\neq 0 \end{array}\right.$$

Алгоритм:

1. найти общий знаменатель всех имеющихся дробей;
2. заменить данное уравнение целым, умножив обе его части на общий знаменатель;
3. Решить полученное целое уравнение;
4. Исключить из его корней те, которые обращают в ноль общий знаменатель.

Иррациональные уравнения

Иррациональным называется уравнение, в котором переменная содержится под знаком корня или под знаком возведения в дробную степень.

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = (g(x))^n \\ g(x) \geq 0 \end{array}\right.$$

$n - \textit{четное}$

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = (g(x))^n$$

$n - \textit{нечетное}$

$$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{array}\right. , n - \textit{четное}$$

$$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x), n - \textit{нечетное}$$

Показательные уравнения

Теорема. Уравнение $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ ($a \succ 0, a \neq 1$)равносильно уравнению *f(x)=g(x).*

Теорема. Уравнение $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$ равносильно системе уравнений $\begin{cases} f(x) = 1, \\ f(x) \succ 0, \\ g(x) = h(x). \end{cases}$

Логарифмические уравнения

Теорема. Если $f(x) \succ 0$ и $g(x) \succ 0$, то уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad a \succ 0, a \neq 1$ равносильно уравнению *f(x)=g(x).*

Теорема. Если $f(x) \succ 0$ и $g(x) \succ 0$, то уравнение $\log_{u(x)} f(x) = \log_{v(x)} f(x)$ равносильно системе уравнений $\begin{cases} f(x) = 1, \\ u(x) = v(x). \end{cases}$