Задание 7. Физический и геометрический смысл производной. Первообразная. Интеграл

Правила нахождения производной

Даны две функции $U = U(x), V = V(x), c = const$

1. $(c \cdot U)' = c \cdot U'$
2. $\left(\frac{U}{c}\right)' = \frac{U'}{c}$
3. $(U \pm V)' = U' \pm V'$
4. $(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$
5. $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - V' \cdot U}{V^2}$
6. $(U(V(x)))' = U'(V(x)) \cdot V'(x)$

График производной	**Функция**
$\boldsymbol{f}`(\boldsymbol{x}) > 0$	$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \uparrow$
$\boldsymbol{f}`(\boldsymbol{x}) < 0$	$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \downarrow$
$\boldsymbol{f}`(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{min}$ и $\boldsymbol{max}$ функции

Таблица производной

$$(c)' = 0$$

$$(c \cdot x)' = c$$

$$(x)' = 1$$

$$(c \cdot x^n)' = n \cdot c \cdot x^{n-1}$$

$$\left(\frac{c}{x}\right)' = -\frac{c}{x^2}$$

$$\left(\frac{c}{x^n}\right)' = -\frac{c \cdot n}{x^{n+1}}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

1. **Геометрический смысл**. Тангенс угла наклона касательной к графику функции в данной точке x_0.

$$tg\alpha = f'(x_0)$$

2. **Физический смысл**. Скорость равна производной пути в точке t. Ускорение равно производной скорости в точке t.

$$v = s'(t)$$
$$a = v'(t)$$

Уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке $A(x_0, f(x_0))$ -

$$y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

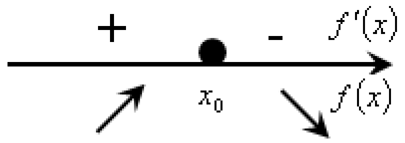
Признак возрастания функции

Достаточный признак возрастания функции. Если $f'(x) \succ 0$ в каждой точке интервала, то функция $f(x)$ возрастает (убывает).

Признак убывания функции

Достаточный признак убывания функции. Если $f'(x) \prec 0$ в каждой точке интервала, то функция $f(x)$ убывает.

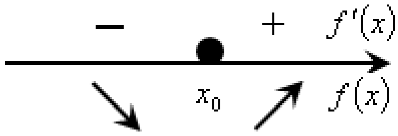
Признак максимума функции



$$x_0 = x_{max}$$

Если в точке x_0 производная функции меняет знак с *плюса* на *минус*, то x_0 есть точка максимума функции.

Признак минимума функции



$x_0 = x_{\min}$

Если в точке x_0 производная функции меняет знак с *минуса* на *плюс*, то x_0 есть точка минимума функции.

Критические точки – внутренние точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует.

Правило нахождения наибольшего (наименьшего) значения непрерывной функции на отрезке.

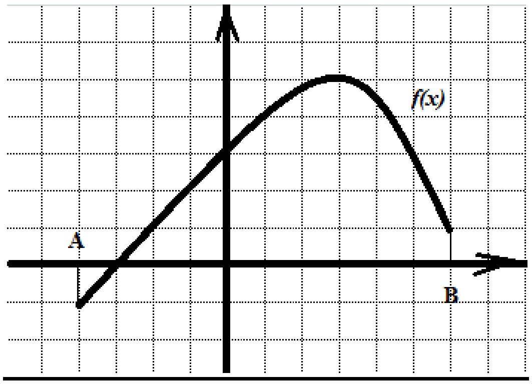
- Находим критические точки функции
- Выбираем те из них, которые принадлежат данному отрезку.
- Вычисляем значения функции в выбранных критических точках и на концах отрезках.

x	a	x_1	x_2	…..	b
$f(x)$	$f(a)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	…..	$f(b)$

- Из полученных чисел выбираем наибольшее (наименьшее).

Геометрический смысл первообразной (интеграл)

$\mathrm{F(B) - F(A)} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{f(x)dx = S}$ – площадь функции f(x) ограниченной на отрезке [A; B].



Первообразная (интегралы)

1. $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}\cdot e^{ax+b}$
2. $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\cdot \sin(ax+b)$
3. $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cdot \cos(ax+b)$
4. $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a}\cdot \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$
5. $\int \frac{dx}{nx+c} = \frac{1}{n}\cdot \ln(nx+c)$
6. $\int \frac{dx}{(nx+c)^b} = \frac{1}{n}\cdot \frac{(nx+c)^{1-b}}{(1-b)}$
7. $\int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{n\cdot x^{\frac{m}{n}+1}}{m+n}$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\cdot tg(ax+b)$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a}\cdot ctg(ax+b)$
10. $\int adx = ax$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\cdot\sqrt{x}$
12. $\int cdx = cx$
13. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$