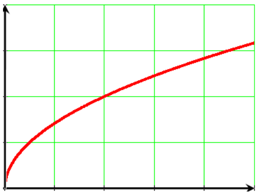
Задание 15. Неравенства

Функция $y=\sqrt{x}$

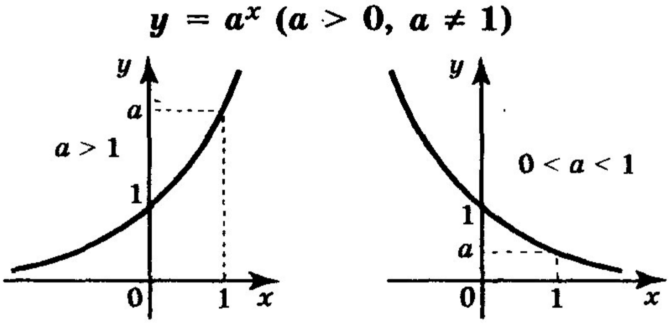
Область определения - $D(y)=[0;+\infty)$
Область значения - $E(y)=[0;+\infty)$



Функция возрастает на $x\in[0;+\infty)$

Показательная функция $y=a^x$

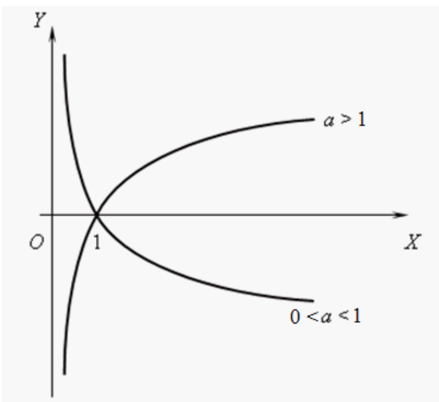
Область определения - $D(y)=R$
Область значения - $E(y)=(0;+\infty)$



если $a>0$, функция возрастающая.
если $a<0$, функция убывающая.

Логарифмическая функция $y=\log_a x$

Область определения - $D(y)=(0;+\infty)$
Область значения - $E(y)=R$
если $a>0$, функция возрастающая.
если $a<0$, функция убывающая.



Теорема

- Если $f(x)\succ g(x)$ и $c\prec 0$, то $c\cdot f(x)\prec c\cdot g(x)$

- Если $f(x) \succ g(x)$ и $c \succ 0$, то $c \cdot f(x) \succ c \cdot g(x)$
- Если $f(x) \succ g(x)$, то $c + f(x) \succ c + g(x)$

Дробно-рациональные неравенства

$\dfrac{p(x)}{q(x)} \succ 0 \Leftrightarrow p(x)q(x) \succ 0$ $\qquad$ $\dfrac{p(x)}{q(x)} \prec 0 \Leftrightarrow p(x)q(x) \prec 0$

$\dfrac{p(x)}{q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p(x)q(x) \geq 0, \\ q(x) \neq 0. \end{cases}$ $\qquad$ $\dfrac{p(x)}{q(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p(x)q(x) \leq 0, \\ q(x) \neq 0. \end{cases}$

$f(x) \cdot g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases} \end{array} \right.$ $\qquad$ $f(x) \cdot g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \end{array} \right.$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \succ 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) \prec 0 \end{cases} \end{array} \right.$ $\qquad$ $\dfrac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \prec 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) \succ 0 \end{cases} \end{array} \right.$

Когда неравенства представлено в виде произведения сомножителей и сравнивается с нулем, то возможны следующие равносильные замены в области существования исходного неравенства:

1. $(y_1 - y_2) \Leftrightarrow (f(y_1) - f(y_2))$, если $f(y)$ - строго возрастающая функция.
2. $(y_1 - y_2) \Leftrightarrow (f(y_2) - f(y_1))$, если $f(y)$ - строго убывающая функция.
3. $f - y \Leftrightarrow f^2 - y^2$, при $f, y \geq 0$.
4. $|y| \Leftrightarrow y^2$

Неравенства с модулем

1. $|a| \prec b, b \succ 0$, то $\begin{cases} a \prec b, \\ a \succ -b. \end{cases}$
2. $|a| \prec b, b \prec 0$, то нет решений.
3. $|a| \succ b, b \succ 0$, то $\left[\begin{array}{l} a \succ b, \\ a \prec -b. \end{array} \right.$
4. $|a| \succ b, b \prec 0$, то $a \in R$.
5. $|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$
6. $|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x). \end{array} \right.$
7. $|y_1| - |y_2| \Leftrightarrow y_1^2 - y_2^2$

Иррациональные неравенства

Теорема. Если обе части неравенства на некотором множестве *X* принимают только неотрицательные значения, то, возведя обе части неравенства в квадрат (или в любую четную степень) и сохранив знак исходного неравенства, получим неравенство, равносильное данному (на множестве *X*).

Теорема. Возведение обеих частей неравенства в одну и ту же нечетную степень (с сохранением знака неравенства) всегда является равносильным преобразованием неравенства.

1. $\sqrt{f(x)} \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge (g(x))^2 \\ g(x) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \prec 0 \end{cases} \end{array}\right.$

2. $\sqrt{f(x)} \succ g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \succ (g(x))^2 \\ g(x) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \prec 0 \end{cases} \end{array}\right.$

3. $\sqrt{f(x)} \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le (g(x))^2 \\ g(x) \ge 0 \\ f(x) \ge 0 \end{cases}$

4. $\sqrt{f(x)} \prec g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \prec (g(x))^2 \\ g(x) \ge 0 \\ f(x) \ge 0 \end{cases}$

5. $\sqrt{f(x)} \succ \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \succ g(x) \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$

6. $\sqrt{f(x)} \ge \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge g(x) \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$

7. $\sqrt[2n+1]{f(x)} \vee \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \vee g(x)$

8. $\sqrt[2n+1]{f(x)} \vee g(x) \Leftrightarrow f(x) \vee [g(x)]^{2n+1}$

9. Знак выражения $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$ совпадает со знаком выражения $f(x) - g(x)$, где $f(x), g(x) \ge 0$.

10. Знак выражения $|f(x)| - \sqrt{g(x)}$ совпадает со знаком выражения $f^2(x) - g(x)$, где $f(x), g(x) \ge 0$.

Показательные неравенства

Теорема. Если $a^{f(x)} \succ a^{g(x)}$ и $a \succ 1$, то $f(x) \succ g(x)$

Теорема. Если $a^{f(x)} \succ a^{g(x)}$ и $0 \prec a \prec 1$, то $f(x) \prec g(x)$

$$h(x)^{f(x)} \succ h(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \succ g(x) \\ h(x) \succ 1 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \prec g(x) \\ 0 \prec h(x) \prec 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$h(x)^{f(x)} \ge h(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge g(x) \\ h(x) \ge 1 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \le g(x) \\ 0 \prec h(x) \le 1 \end{cases} \\ h(x) = 1 \end{array}\right.$$

Равносильные замены при решении показательных неравенств:

$$a^{y_1} - a^{y_2} \Leftrightarrow (y_1 - y_2)(a-1)$$

Логарифмические неравенства

Теорема. Если $\log_a f(x) \succ \log_a g(x)$ и $a \succ 1$, то $f(x) \succ g(x)$.

Теорема. Если $\log_a f(x) \succ \log_a g(x)$ и $0 \prec a \prec 1$, то $f(x) \prec g(x)$

Решение задач на логарифмические неравенства должно начинаться с нахождения ОДЗ.

Область определения для функции $y = \log_a f(x)$

$$\begin{cases} a \succ 0, \\ a \ne 1, \\ f(x) \succ 0. \end{cases}$$

Пусть $a \succ 0 \; и \; a \ne 1$, то

1. $\log_a f(x) \succ b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \succ a^b, a \succ 1 \\ f(x) \prec a^b, 0 \prec a \prec 1 \end{cases}$

2. $\log_a f(x) \ge b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge a^b, a \succ 1 \\ f(x) \le a^b, 0 \prec a \prec 1 \end{cases}$

3. $\log_a f(x) \prec b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \succ a^b, 0 \prec a \prec 1 \\ f(x) \prec a^b, a \succ 1 \end{cases}$

4. $\log_a f(x) \le b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge a^b, 0 \prec a \prec 1 \\ f(x) \le a^b, a \succ 1 \end{cases}$

5. $\log_{h(x)} f(x) \succ \log_{h(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \succ g(x) \\ g(x) \succ 0 \\ h(x) \succ 1 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \succ f(x) \\ f(x) \succ 0 \\ 0 \prec h(x) \prec 1 \end{cases} \end{array}\right.$

6. $\log_{h(x)} \geq \log_{h(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ g(x) \succ 0 \\ h(x) \succ 1 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq f(x) \\ f(x) \succ 0 \\ 0 \prec h(x) \prec 1 \end{cases} \end{array}\right.$

Равносильные замены при решении логарифмических неравенств:

$$\log_a y_1 - \log_a y_2 \Leftrightarrow (y_1 - y_2)(a-1)$$