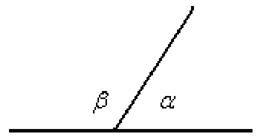
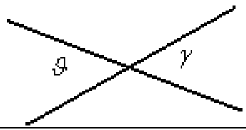
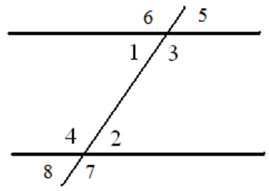
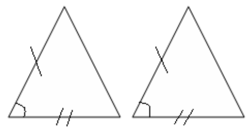
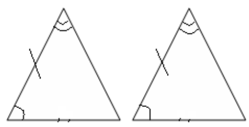
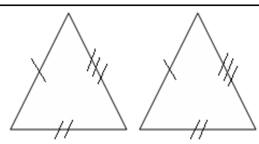
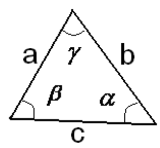
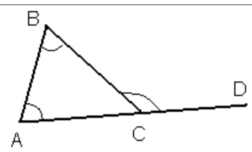
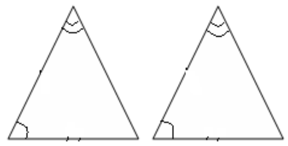
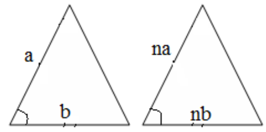
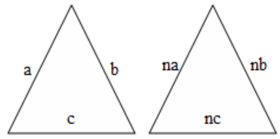
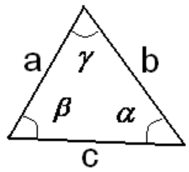
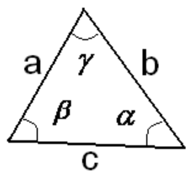
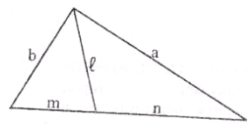
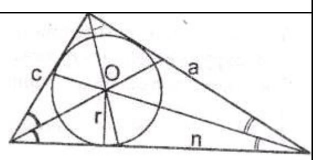
Задание 3, 6, 16. Планиметрия

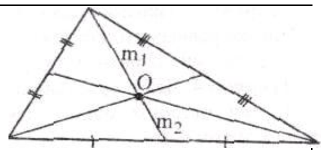
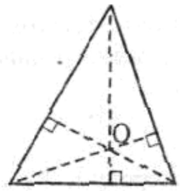
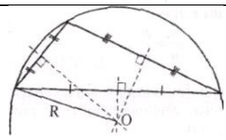
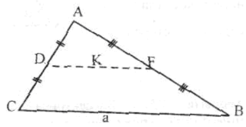
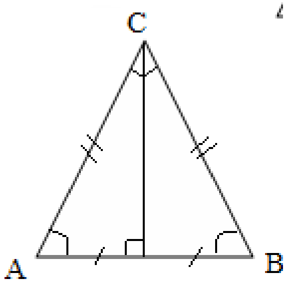
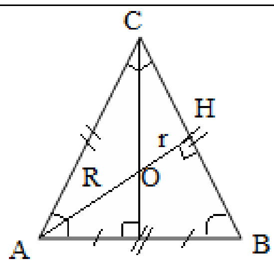
Угловые соотношения в плоских фигурах

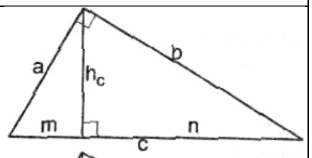
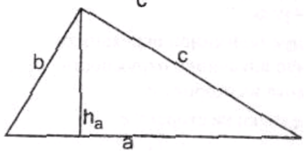
Теорема. Сумма смежных углов равна 180^0. α *и* β – *смежные углы* **Теорема.** Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны.	
Теорема. Вертикальные углы равны. γ *и* ϑ – *вертикальные углы*	
Теорема. Если две прямые параллельности пересечены секущей, то 1. Накрест лежащие углы равны; 2. Соответственные углы равны; 3. Сумма внутренних односторонних углов равна 180^0. $\angle 1$ *и* $\angle 2, \angle 3$*и*$\angle 4$ – *внутренние накрест лежащие* $\angle 2$ *и* $\angle 3, \angle 1$*и*$\angle 4$ – *внутренние односторонние углы* $\angle 5$ *и* $\angle 2, \angle 1$*и*$\angle 8$ – *соответсвенные углы*	

Треугольники

Признаки равенства треугольников: Два треугольника равны между собой, если: 1. Две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого; 2. Сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим углам другого. 3. Три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого.	
	
	
Теорема. Сумма углов треугольника равна 180^0.	$\alpha+\beta+\gamma=180^0$ 
Теорема. Против большей стороны в треугольнике лежит больший угол. Против равных сторон лежат равные углы.	
Теорема. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним. $\angle BCD = \angle BAC + \angle ABC$	

Подобие треугольников Два треугольника подобны, если: 1. Два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника; 2. Две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы образованные этими сторонами равны; 3. Стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника. **Теорема.** Отношение периметров двух подобных треугольников равно отношению сходственных сторон (коэффициенту подобия). **Теорема.** Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия. **Теорема.** Если у двух треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания. **Теорема.** Если у двух треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания.	   $\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = n$ $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = n^2$
Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$ *R*- радиус описанной окружности	
Теорема косинусов. $a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha,$ $\alpha - \text{угол между } b \text{ и } c$	
Биссектриса делит угол пополам. **Теорема.** *Биссектриса* внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные сторонам, прилежащим к углу. $\frac{m}{n} = \frac{b}{a}$	
Теорема. $S = r\cdot p = \frac{r}{2}\cdot(a+b+c)$ $a+b+c = 2p$ — периметр, $\frac{a+b+c}{2} = p$ — полупериметр. *r* - радиус вписанной окружности	

Медиана – отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны. **Теорема.** *Медианы* треугольника пересекаются в одной точке - центре тяжести треугольника. Центр тяжести делит медианы в отношении 2:1, считая от вершины. $\frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{1}$ **Теорема.** Медиана треугольника разбивает его на два равновеликих треугольника.	
Высота – перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону.	
Теорема. *Серединные перпендикуляры* сторон треугольника пересекаются в одной точке – центре *описанной окружности*. **Теорема.** $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$ R – радиус описанной окружности O – центр.	
Средняя линия – отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. **Теорема.** *Средняя линия* треугольника параллельна третьей его стороне и равна ее половине. $K = \frac{1}{2} \cdot a; \quad DF \parallel CB$	
Равнобедренный треугольник $AC = BC$ – боковые стороны, AB – основание, C – вершина. Треугольник с двумя равными сторонами. **Теорема**. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны. **Теорема.** В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.	
Правильный треугольник **(равносторонний)** Правильный треугольник – это треугольник, у которого все стороны равны и все углы по 60^0. **Теорема.** Для равностороннего треугольника центры вписанной и описанной окружностей, центр тяжести и	 *OA=R, OH=r*

ортоцентр совпадают. R – радиус описанной окружности около правильного треугольника со стороной а. r – радиус вписанной окружности около правильного треугольника со стороной а. $R = \frac{a}{\sqrt{3}} \qquad r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ $a \ = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3}$ $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$	
Прямоугольный треугольник **Теорема.** Высота, опущенная из вершины прямого угла треугольника на гипотенузу, есть среднее геометрическое отрезков, на которые делится каждый катет. $h_c = \sqrt{m \cdot n}$, $h_c{}^2 = m \cdot n$ **Теорема**. Катет равен среднему пропорциональному между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу. $a^2 = c \cdot m, \quad b^2 = c \cdot n$ **Теорема.** Напротив угла в 30^0 лежит катет равный половине гипотенузы. **Соотношение между сторонами и углами прямоугольного треугольника** sin - отношение между противолежащим катетом и гипотенузой; cos - отношение между прилежащим катетом и гипотенузой; *tg* - отношение между противолежащим и прилежащим катетами; *ctg* - отношение между прилежащим и противолежащим катетами. **Теорема Пифагора**. Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. $c^2 = a^2 + b^2$, где a,b - катеты, c - гипотенуза. **Теорема.** Центр описанной вокруг прямоугольного треугольника окружности лежит на середине гипотенузы. $R = \frac{a}{2}$, a - гипотенуза **Теорема.** Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен $r = \frac{b+c-a}{2}$, a - гипотенуза, b, c - катеты **Теорема.** Медиана, проведенная из	 

вершины прямого угла равна половине гипотенузы.

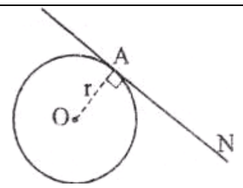
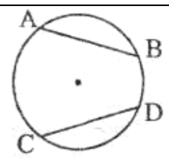
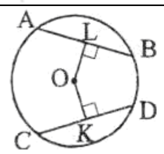
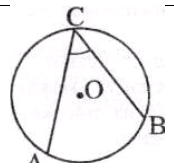
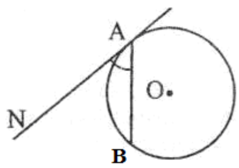
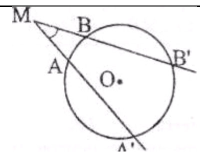
Подобие прямоугольного треугольника

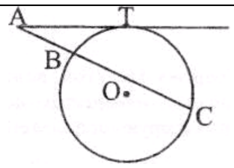
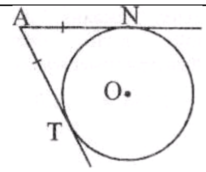
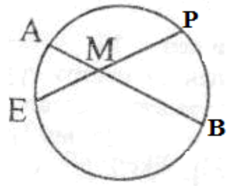
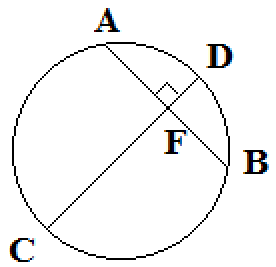
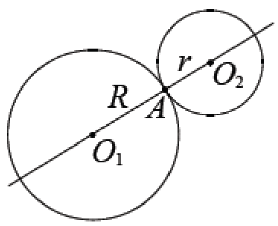
Теорема. Прямоугольные треугольники подобны, если у них по равному острому углу.

Волшебные стороны

Катет	Катет	Гипотенуза
3	4	5
5	12	13
6	8	10
10	24	26

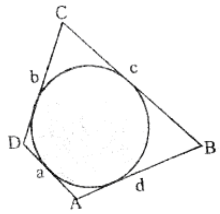
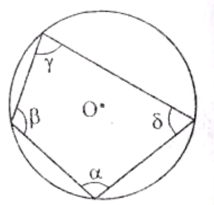
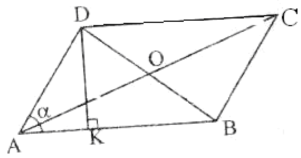
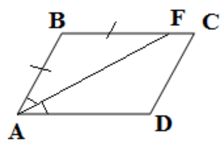
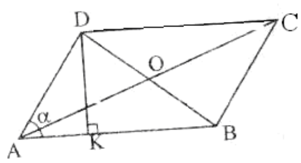
Окружность

Теорема. Прямая, проходящая через точку окружности, тогда и только тогда касается окружности, когда она перпендикулярная к радиусу, проведенному в эту точку. $OA \perp AN \Rightarrow AN -$ касательная.	
Теорема. Равные хорды стягивают равные дуги и обратно. $AB = CD \Leftrightarrow \cup AB = \cup CD$	
Теорема. Хорды, равноотстоящие от центра, равны, и наоборот. $OL = OK \Leftrightarrow AB = CD$	
Теорема. Угол, вписанный в окружность, измеряется половиной дуги, на которую он опирается. $\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AB$ *Следствие.* Угол, опирающийся на диаметр - прямой.	
Теорема. Угол между касательной и секущей, проходящей через точку касания, измеряется половиной дуги окружности, лежащей внутри измеряемого угла. $\angle BAN = \frac{1}{2} \cup AB$	
Теорема. Угол, образованный двумя секущими, проведенными из внешней точки, измеряется полуразностью дуг и A'B' и AB, лежащих внутри его. $\angle AMB = \frac{1}{2} \cdot (\cup A'B' - \cup AB)$	

Теорема. Произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной или касательная равна среднему геометрическому между секущей, проведенной из той же точки, и ее внешней частью. *Следствие.* Для любой секущей, проведенной через данную точку *A,* произведение ее длины на внешнюю часть постоянно: *AC* • *AB* = *C(const).*	 $AT^2 = AC \cdot AB$ $AT = \sqrt{AC \cdot AB}$
Теорема. Две касательные к окружности, проведенные из одной точки, равны между собой: **AN=AT**	
Теорема. Если через точку (т. *M,* см. рис.), взятую внутри круга, проведено сколько угодно хорд *(AB, AP, ...*), то произведение отрезков каждой хорды есть число постоянное для всех хорд. ***AM•MB = EM•MP=...=const***	
Теорема. Радиус (диаметр) CD, перпендикулярный хорде AB, делит хорду пополам. $CD \perp AB \Rightarrow AF = FB$	
Теорема. При любом способе касания точка касания и центры окружностей лежат на одной прямой.	

Многоугольники

Теорема. Сумма внутренних углов выпуклого n - угольника равна $180° \cdot (n-2)$.	
Правильный многоугольник	
Теорема. Каждый угол правильного n – угольника равен $\alpha_n = \frac{180°\,(n-2)}{n}$. **Теорема.** Окружность, вписанная в правильный n – угольник, касается всех сторон n – угольника в их серединах. **Теорема.** Центр окружности, описанной около правильного n – угольника совпадает	

с центром окружности, вписанной в тот же n – угольник. **Теорема.** Длина стороны правильного n – угольника, вписанного в окружность радиуса R равна $a = 2R \cdot sin\frac{180°}{n}$. **Теорема.** Длина стороны правильного n – угольника, описанного около окружности радиуса r равна $a = 2r \cdot tg\frac{180°}{n}$.	
Четырехугольники	
Теорема. В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда когда, a+c=b+d	
Теорема. Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда $\alpha + \gamma = \beta + \delta$	
Параллелограмм **Теорема.** Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. **Теорема.** У параллелограмма противолежащие стороны равны, противолежащие углы равны. **Теорема.** Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник. $\angle BAF = \angle FAD \Rightarrow AB = BF$ **Теорема.** Диагональ параллелограмма разбивает его на два равновеликих треугольника. $S_{ADC} = S_{ACB}$ $S_{ADB} = S_{BDC}$ **<u>Формулы:</u>** $S = DK \cdot AB = AD \cdot AB \cdot \sin\alpha$ $AC^2 + BD^2 = 2 \cdot \left(AB^2 + AD^2\right)$	

Ромб

Определение. Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны.

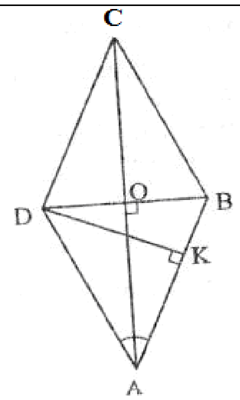
Теорема. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

Формулы:

$$AC^2 + BD^2 = 4 \cdot AD^2$$

$$S = AD^2 \cdot \sin \angle A = AD \cdot DK = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AC$$

Заметим, что ромб – параллелограмм, поэтому свойства параллелограмма сохраняются.



Прямоугольник

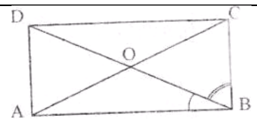
Определение. Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые.

Теорема. Диагонали прямоугольника равны.

Формулы:

$S = AB \cdot AD$

Посмотри!!! Прямоугольник - это параллелограмм, поэтому свойства параллелограмма сохраняются.



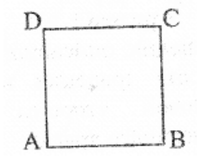
Квадрат

Определение. Квадрат - частный случай прямоугольника.

Свойства квадрата:

- все стороны равны;
- все углы прямые;
- диагонали равны и пересекаются под прямым углом и являются биссектрисами его углов.

Формулы: $S = AB^2 = \frac{1}{2} \cdot AC^2$



Трапеция

Определение. Трапецией называется четырехугольник, у которого только две противолежащие стороны параллельны.

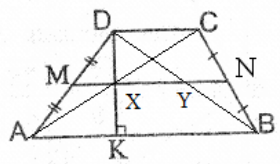
где *MN — средняя линия* трапеции;

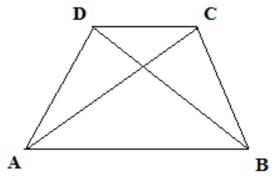
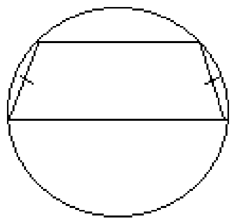
Определение. Если у трапеции боковые стороны равны, то такая трапеция называется *равнобочной (равнобедренной).*

Теорема. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

$$MN = \frac{AB + DC}{2}$$

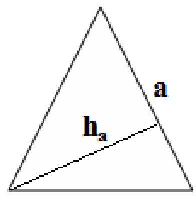
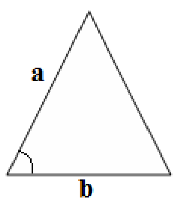
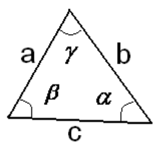
Теорема. Середина диагоналей трапеции параллельна основаниям и равна их полуразности.

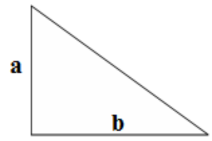


$$XY=\frac{AB-DC}{2}$$ **Теорема.** Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на большее основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали – полусумме оснований (средней линии). $AK=\frac{AB-DC}{2}$ $BK=\frac{AB-DC}{2}$ **Теорема.** Трапеция разбивается диагоналями на два равновеликих треугольника (примыкающих к боковым сторонам $S_{ADF}=S_{BFC}$) и два подобных треугольника (примыкающих к основаниям ΔAFB и ΔDFC). **Теорема.** Трапеция вписана в некоторую окружность тогда и только тогда, когда она является равнобедренной. **<u>Формулы:</u>** $S=\frac{1}{2}\cdot DK\cdot\left(AB+DC\right)=MN\cdot DK$	 

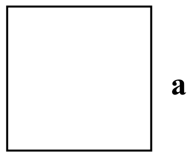
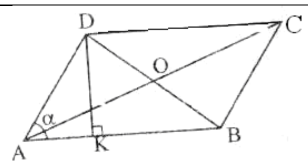
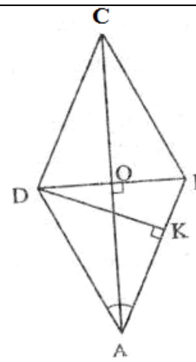
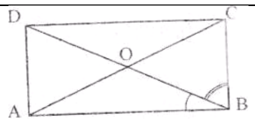
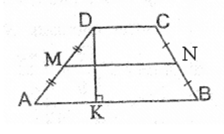
Площади фигур

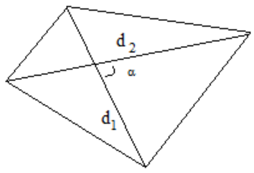
Треугольники

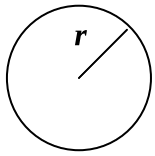
Площадь треугольника равна половине произведения его сторон на проведенную к ней высоту.	$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a$	
Площадь треугольника равна половине произведения двух любых его сторон на синус угла между ними.	$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma$	
Формула Герона $S=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$		
$S=r\cdot p=\frac{r}{2}\cdot(a+b+c)$	$a+b+c=2p$ — периметр, $\frac{a+b+c}{2}=p$ — полупериметр.	

Площадь треугольника равна произведению трех его сторон, деленному на учетверенный радиус описанной окружности.	$S = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4R}$	
Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведение катетов.	$S = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot b$	

Четырехугольники

Четырехугольник	$S = \sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)}$, где p - полупериметр	
Квадрат	$S = a^2$	
Параллелограмм	$S = DK \cdot AB$ $S = AD \cdot AB \cdot \sin\alpha$	
Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны.	$S = \dfrac{1}{2} \cdot BD \cdot AC$	
Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые.	$S = AB \cdot AD$	
Трапецией называется четырехугольник, у которого только две противолежащие стороны параллельны. где MN — *средняя линия* трапеции.	$S = \dfrac{1}{2} \cdot BK \cdot (AD + BC)$ $S = MN \cdot BK$	

Площадь выпуклого четырехугольника	$S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha$, где α - угол между $d_1 и\ d_2$	

Круг	$S = \pi r^2$	
Круговой сектор	$S = \frac{\pi r^2}{360°} \cdot \alpha$	