Задание 8, 14. Стереометрия

Основные определения

Аксиомы стереометрии

Теорема. Через любые три точки, не лежащих на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

Теорема. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

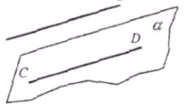
Теорема. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Параллельность прямых и плоскостей

Лемма о параллельности трех прямых. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то другая прямая пересекает эту плоскость.

Теорема. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

Теорема. Если прямая параллельна какой-нибудь прямой, расположенной на плоскости, то она параллельна этой плоскости.



$$AB \| CD \Rightarrow AB \| \text{плоскости } \alpha$$

Теорема. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, то линия пересечения параллельна первой прямой.

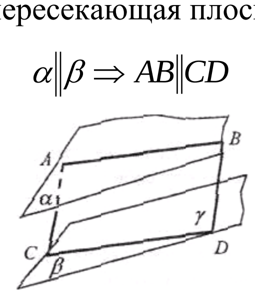
β - пересекающая плоскость

$$AB \| \text{плоскости } \alpha \Rightarrow AB \| CD$$

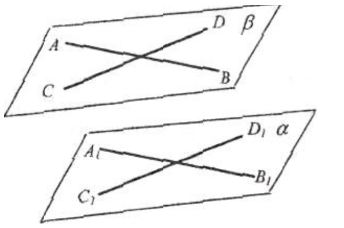
Теорема. Если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то линии пересечения параллельны.

γ - пересекающая плоскость

$$\alpha \| \beta \Rightarrow AB \| CD$$



Теорема. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.



$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel A_1B_1 \\ CD \parallel C_1D_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$$

Определение. Две прямые называются скрещивающимися, если не лежат в одной плоскости.

Признак скрещивающихся прямых

Теорема. Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.

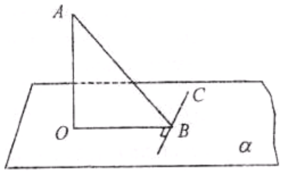
Теорема. Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

Перпендикулярность прямых и плоскостей

Теорема. Для того, чтобы прямая была перпендикулярна плоскости, необходимо и достаточно, чтобы она была перпендикулярная к двум произвольным непараллельным прямым, лежащим в этой плоскости.

$$\left.\begin{array}{l} OK \perp AB \\ OK \perp CD \end{array}\right\} \Leftrightarrow OK \perp \alpha$$

Теорема о трех перпендикулярах. Для того, чтобы прямая, лежащая в плоскости, была перпендикулярная наклонной, необходимо и достаточно, чтобы эта прямая была перпендикулярна проекции наклонной.



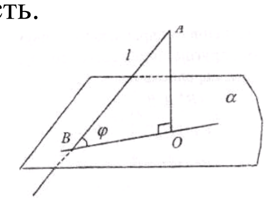
$$\begin{cases} OB - проекция\ AB\ на\ \alpha \\ OB \perp BC \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow AB \perp BC$$

Теорема. Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они параллельны между собой.

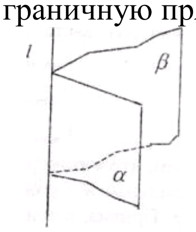
Теорема. Если две плоскости перпендикулярны к одной прямой, то они параллельны между собой.

Определение. Углом между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и ее проекцией на плоскость.

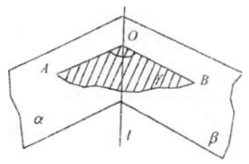


$$\angle ABO = \varphi = (l, \alpha)$$

Определение. *Двугранным углом* называется фигура, образованная двумя полуплоскостями, имеющими общую граничную прямую.



Полуплоскости называются гранями, а их общая прямая - ребром двугранного угла.
α, β - полуплоскости, l - прямая.



Определение. Пересечение и плоскости, к его ребру, углом двугранного угла перпендикулярной I называется линейным двугранного угла.
$\angle\alpha\, l\beta$ -двугранный угол,

$\gamma \perp l \Rightarrow \angle AOB$ - линейный угол двугранного угла $\angle\alpha\, l\beta$

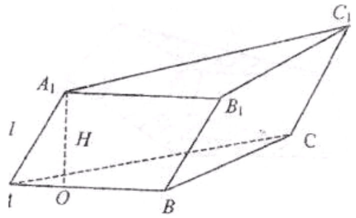
Определение. Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

Многогранники

Определение. Многогранником называется тело, ограниченное плоскими многоугольниками.

Призма

Различают *призмы прямые* (рис.а) и *наклонные* (рис.б) (по углу наклона бокового ребра к плоскости основания).



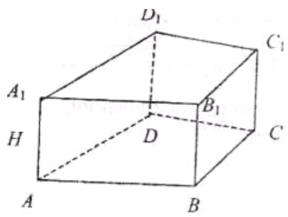
$$S_{бок.поверх.} = P_{\perp} \cdot l_{бок.ребра}$$

$$l - длина\ бокового\ ребра$$

$$P_{\perp} - периметр \perp -ого\ ему\ сечения$$

$$S_{полной} = S_{бок.поверх.} + 2 \cdot S_{основ.}$$

Прямая призма, основанием которой является правильный многоугольник, называется *правильной призмой*.



а)

$$S_{бок.поверх.} = P_{основ.} \cdot l_{бок.ребра} \quad (l = H)$$

$$V_{призмы} = S_{основ.} \cdot H$$

$$V_{прям.призмы} = S_{основ.} \cdot l_{бок.ребра}$$

$$S_{призмы} = S_{бок.поверх.} + 2 \cdot S_{основ.}$$

Заметим, что многогранник называется *правильным*, если все его грани - равные правильные n- угольники и из каждой вершины выходит одно и то же число ребер.

Параллелепипед

Призма, в основании которой лежит параллелограмм, называется *параллелепипедом.*

Свойства параллелепипеда:

- противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны;
- диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Прямоугольный параллелепипед

Свойства прямоугольного параллелепипеда:

- гранями являются прямоугольники;
- все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда – прямые.

Теорема. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

Теорема. Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

<u>Формулы:</u>

$V = a \cdot b \cdot c = S \cdot h,$

$S = ab - площадь\ основания$

$h - высота$

$S_{полной} = 2(ab + bc + ac)$

Пирамида

S_{Δ} - площади боковых треугольных граней пирамиды.

Теорема. Если все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью ее основания равные углы (все боковые ребра пирамиды равны), то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания.

Теорема. Если все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом φ, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в основание.

$$S_{бок.поверх.} = \frac{S_{основания}}{\cos\varphi}$$

Теорема. Если боковая грань пирамиды перпендикулярна плоскости основания пирамиды, то высота пирамиды совпадает с высотой этой грани проведенной к стороне основания пирамиды.
Теорема. Если две грани пирамиды перпендикулярны основанию пирамиды, то высота пирамиды принадлежит прямой, по которой пересекаются плоскости этих граней.
<u>Формулы:</u>
$S_{пирамиды} = S_{основ.} + S_{бок.поверх.}$

Правильная пирамида

Пирамида считается *правильной*, если основание ее – правильный многоугольник, а вершина проектируется в центр этого многоугольника.

<u>Формулы:</u>

$$S_{бок.поверх.} = \frac{1}{2} \cdot P_{основ.} \cdot h_{бок.}$$

$$V_{пирамиды} = \frac{1}{3} \cdot S_{основ.} \cdot H$$

$P_{основ.}$ - периметр основания,
$h_{бок.}$ - апофема пирамиды;

Тетраэдр

$$S_{полной.} = a^2\sqrt{3}$$

$a - сторона$

$$V_{тетрадра} = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot a^3$$

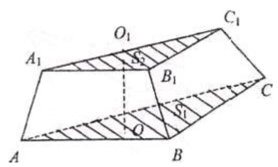
Усеченная пирамида

<u>Формулы:</u>

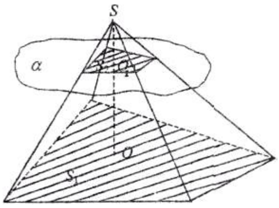
$$V_{ус.пирамиды} = \frac{1}{3} \cdot \left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right) \cdot H,$$

$S_1, S_2 - площадь\ основания$

$H - высота$



Правильная усеченная пирамида



Теорема. Если в пирамиде проведено сечение, параллельное основанию, то площади оснований обеих пирамид (т.е. площади оснований усеченной пирамиды) относятся, как квадраты соответствующих высот.

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{(O_1S)^2}{(OS)^2} = \frac{h_2^2}{h_1^2}$$

Существует пять правильных многогранников: тетраэдр (4 треугольника, 6 ребер, 4 вершины), куб (6 квадратов, 12 ребер, 8 вершин), октаэдр (8 треугольников, 12 ребер, 6 вершин), додекаэдр (12 пятиугольников, 30 ребер, 20 вершин), икосаэдр (20 треугольников, 30 ребер, 12 вершин).

<u>Формулы:</u>

$$S_{бок.поверх.} = (P + p) \cdot \frac{h_{бок.}}{2}$$

$$S_{бок.поверх.} = \frac{S_1 - S_2}{\cos\alpha}$$

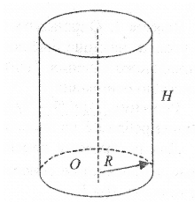
$$S_{полн.} = S_{бок.} + S_1 + S_2$$

S_1 и S_2 – площадь верхнего и нижнего основания
α –мера двугранного угла при ребре нижнего основания
P - периметр нижнего основания,
p - периметр верхнего основания,
$h_{бок.}$ - апофема боковой грани.

Круглые тела

Определение. Круглые тела - тела, ограниченные поверхностями вращения.

Цилиндр

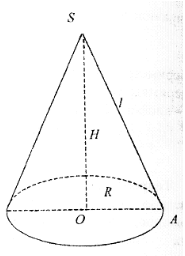


<u>Формулы:</u>

$$S_{бок.поверх.} = 2\pi \cdot R \cdot H, \quad V = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$S_{цилиндра} = 2\pi R \cdot (R + H)$$

Прямой круговой конус



Формулы:

$S_{бок.поверх.} = \pi R \cdot l,$

$S_{конуса} = \pi R \cdot (l + R)$

$S_{бок.поверх.усеч.конуса} = \pi \cdot (R_1 + R_2) \cdot l,$

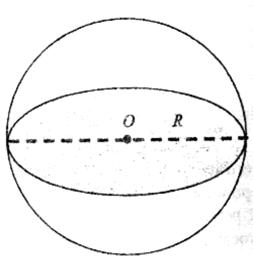
$V_{конуса} = \frac{1}{3} \cdot S_{основ.} \cdot H,$

$V_{усеч.конуса} = \frac{1}{3} \cdot \left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right) \cdot H$

R_1, R_2 *- радиусы оснований усеченного конуса,*

S_1, S_2 *- площади оснований усеченного конуса*

Сфера, шар



Уравнение сферы: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2,$

$A(x_0, y_0, z_0) -$ *центр сфера*

Теорема. Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

Формулы:

$S_{сферы} = 4\pi R^2,$

$V_{шара} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3,$

$S_{шаровогопояса} = 2\pi R \cdot h = S_{ш.п.},$

$h -$ *высота пояса*

$S_{шаровогосегмента} = 2\pi R \cdot h,$

$h -$ *высота сегмента*

$V_{шар.сектора} = \frac{1}{3} \cdot S_{ш.п.} \cdot R,$

$$V_{шар.сегмента} = \frac{\pi h^2}{3} \cdot (3R - h),$$

$h - высота\ шарового\ сегмента$