

Вспомогалка по 6 прототипу ЕГЭ

Областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ называют множество всех тех значений переменной x , при которых и выражение $f(x)$, и выражение $g(x)$ имеют смысл.

Функция	Условие
$y = \frac{g(x)}{f(x)}$	$f(x) \neq 0$
$y = \sqrt{f(x)}$	$f(x) \geq 0$
$y = \log_{g(x)} f(x)$	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$
$y = \operatorname{tg} f(x)$	$f(x) \neq \pi/2 + \pi n$

Теоремы о равносильности уравнений

Исходное уравнение	Равносильное уравнение (система)
$f(x) = g(x)$	$\Leftrightarrow f(x) + C = g(x) + C$
$f(x) \cdot g(x) = 0$	$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$
$\frac{f(x)}{g(x)} = 0$	$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$
$f^2(x) + g^2(x) = 0$	$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Дискриминант: $D = b^2 - 4ac$

Если $D < 0$, то нет корней $x \in \emptyset$

$D = 0$, то существует один корень $x_1 = x_2$

$D > 0$, то существует два корня x_1, x_2

Формула корней: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Формулы сокращенного умножения

1. Квадрат суммы (разности) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

2. Разность квадратов $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$

3. Куб суммы (разности) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 \pm b^3$

4. Сумма (разность) кубов $a^3 \pm b^3 = (a \pm b) \cdot (a^2 \mp a \cdot b + b^2)$

Частные случаи:

1) Если $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1, x_2 = c/a$.

2) Если $b = a + c$, то $x_1 = -1, x_2 = -c/a$.

Разложение квадратного трехчлена на линейные множители: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Теорема Виета

Приведенное квадратное уравнение: $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Рациональные уравнения

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p(x) = 0 \\ q(x) \neq 0 \end{cases}$$

Алгоритм:

1. найти общий знаменатель всех имеющихся дробей;
2. заменить данное уравнение целым, умножив обе его части на общий знаменатель;
3. Решить полученное целое уравнение;
4. Исключить из его корней те, которые обращают в ноль общий знаменатель.

Иррациональные уравнения

Иррациональным называется уравнение, в котором переменная содержится под знаком корня или под знаком возведения в дробную степень.

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^n \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$n - \text{четное}$

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = (g(x))^n$$

$n - \text{нечетное}$

$$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x), n - \text{нечетное}$$

Показательные уравнения

Теорема. Уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ($a > 0, a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Теорема. Уравнение $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$ равносильно системе уравнений $\begin{cases} f(x) = 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) = h(x). \end{cases}$

Таблица нескольких степеней

$a \backslash n$	2	3	4	5	6	7
2	4	8	16	32	64	128
3	9	27	81	243	729	2187
4	16	64	256	1024	4096	16384
5	25	125	625	3125	15625	78125
6	36	216	1296	7776	46656	279936
7	49	343	2401	16807	117649	823543

Свойства степени

$$a^0 = 1,$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n \div a^m = a^{n-m}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

Логарифмические уравнения

Определение логарифма

$$a^b = c, \quad \log_a c = b$$

$\ln x$ - логарифм по основанию e , $e = 2.7$

$\lg x$ - логарифм по основанию 10.

Свойства логарифмов

Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c) \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

$$c \cdot \log_a b = \log_a b^c$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \cdot \log_a b, \quad c \neq 0 \quad a^{\log_a c} = c$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}, \quad c \neq 1, b \neq 1$$

$$\frac{\log_n b}{\log_n c} = \frac{\log_m b}{\log_m c} = \log_c b$$

$$\log_n b \cdot \log_m c = \log_m b \cdot \log_n c$$

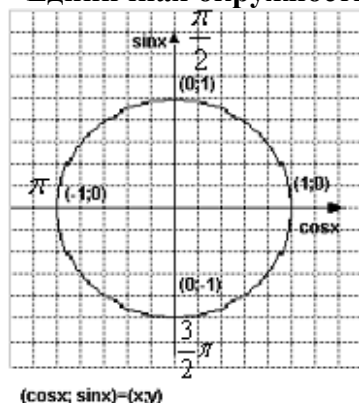
Теорема. Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ $a > 0, a \neq 1$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Теорема. Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то уравнение $\log_{u(x)} f(x) = \log_{v(x)} f(x)$ равносильно системе

$$\text{уравнений} \begin{cases} f(x) = 1, \\ u(x) = v(x). \end{cases}$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Единичная окружность



Основные углы

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

Простейшие тригонометрические уравнения

Решение простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	Общее решение	Частные случаи		
		$a = -1$	$a = 0$	$a = 1$
$\sin x = a$ $ a \leq 1$	$\begin{cases} x = \arcsin a + 2\pi n \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k \end{cases}$ $0 < a < 1$ $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$ $-1 < a < 0$ $x = (-1)^{n+1} \cdot \arcsin a + \pi n$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$
$\cos x = a$ $ a \leq 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n$	$x = \pi + 2\pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = 2\pi n$
$\operatorname{tg} x = a$ $a \in (-\infty; \infty)$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n$ ОДЗ: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$
$\operatorname{ctg} x = a$ $a \in (-\infty; \infty)$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$ ОДЗ: $x \neq \pi n$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$

Взаимно обратные функции

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$$