

Прототип 3 задания ЕГЭ. Стереометрия

Основные определения

Аксиомы стереометрии

Теорема. Через любые три точки, не лежащих на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

Теорема. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

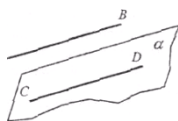
Теорема. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Параллельность прямых и плоскостей

Лемма о параллельности трех прямых. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то другая прямая пересекает эту плоскость.

Теорема. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

Теорема. Если прямая параллельна какой-нибудь прямой, расположенной на плоскости, то она параллельна этой плоскости.

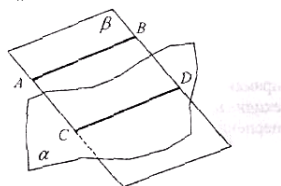


$$AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel \text{плоскости } \alpha$$

Теорема. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, то линия пересечения параллельна первой прямой.

β - пересекающая плоскость

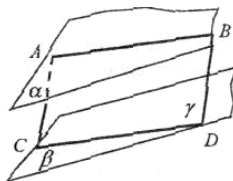
$$AB \parallel \text{плоскости } \alpha \Rightarrow AB \parallel CD$$



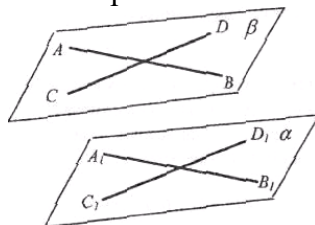
Теорема. Если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то линии пересечения параллельны.

γ - пересекающая плоскость

$$\alpha \parallel \beta \Rightarrow AB \parallel CD$$



Теорема. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.



$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel A_1B_1 \\ CD \parallel C_1D_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$$

Определение. Две прямые называются скрещивающимися, если не лежат в одной плоскости.

Признак скрещивающихся прямых

Теорема. Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.

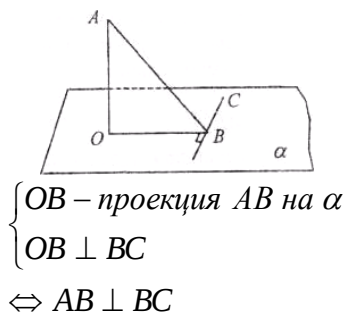
Теорема. Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

Перпендикулярность прямых и плоскостей

Теорема. Для того, чтобы прямая была перпендикулярна плоскости, необходимо и достаточно, чтобы она была перпендикулярна к двум произвольным непараллельным прямым, лежащим в этой плоскости.

$$\left. \begin{array}{l} OK \perp AB \\ OK \perp CD \end{array} \right\} \Leftrightarrow OK \perp \alpha$$

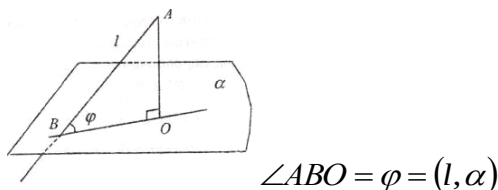
Теорема о трех перпендикулярах. Для того, чтобы прямая, лежащая в плоскости, была перпендикулярна наклонной, необходимо и достаточно, чтобы эта прямая была перпендикулярна проекции наклонной.



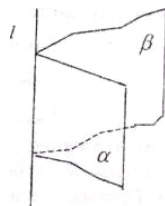
Теорема. Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они параллельны между собой.

Теорема. Если две плоскости перпендикулярны к одной прямой, то они параллельны между собой.

Определение. Углом между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и ее проекцией на плоскость.

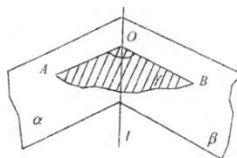


Определение. Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями, имеющими общую граничную прямую.



Полуплоскости называются гранями, а их общая прямая - ребром двугранного угла.

α, β - полуплоскости, l - прямая.



Определение. Пересечение с плоскости, к его ребру, углом двугранного угла перпендикулярной Γ называется линейным двугранного угла.

$\angle \alpha l \beta$ - двугранный угол,

$\gamma \perp l \Rightarrow \angle AOB$ - линейный угол двугранного угла $\angle \alpha l \beta$

Определение. Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

Многогранники

Определение. Многогранником называется тело, ограниченное плоскими многоугольниками.

Объемы

Параллелепипед

Призма, в основании которой лежит параллелограмм, называется *параллелепипедом*.

Свойства параллелепипеда:

- противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны;
- диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Прямоугольный параллелепипед

Свойства прямоугольного параллелепипеда:

- гранями являются прямоугольники;
- все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда – прямые.

Теорема. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Теорема. Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

Формулы:

$$V = a \cdot b \cdot c = S \cdot h,$$

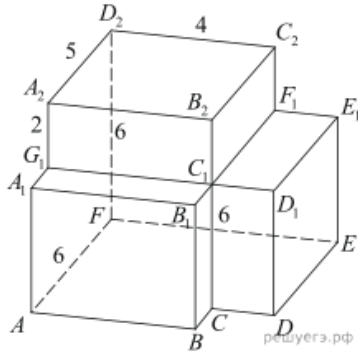
$$S = ab - \text{площадь основания}$$

$$h - \text{высота}$$

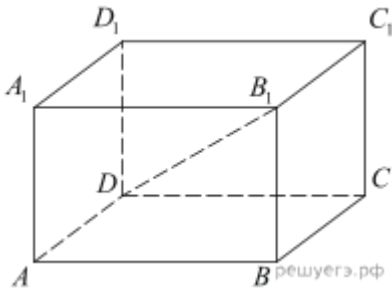
$$S_{\text{полной}} = 2(ab + bc + ac)$$

Упражнения

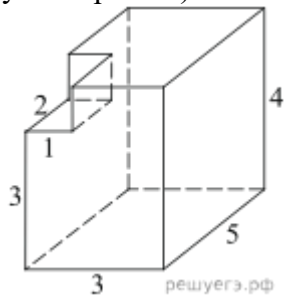
1. Найдите угол AD_2E многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ дайте в градусах.



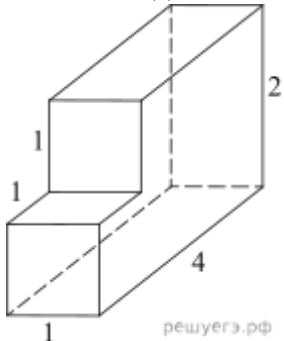
2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $DB_1 = 21$, $CD = 16$, $B_1 C_1 = 11$. Найдите длину ребра BB_1 .



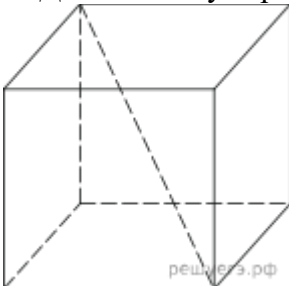
3. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



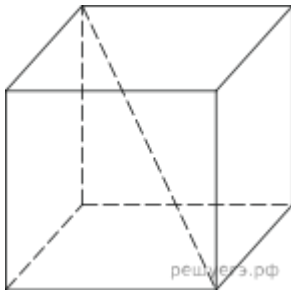
4. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



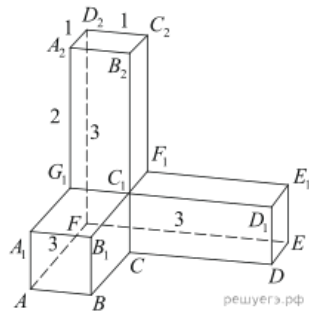
5. Диагональ куба равна 11. Найдите площадь его поверхности.



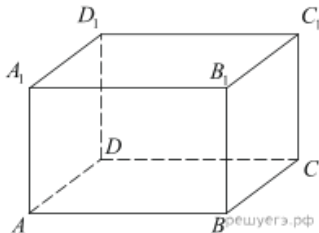
6. Диагональ куба равна $\sqrt{243}$. Найдите его объем.



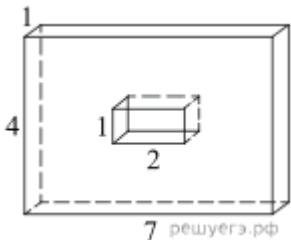
7. Найдите угол AEF многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ дайте в градусах.



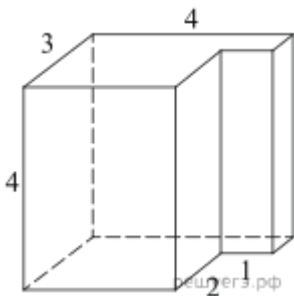
8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AB = 6$, $BC = 5$, $AA_1 = 4$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, A_1, B_1 .



9. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

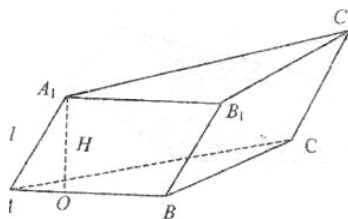


10. Найдите объём многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



Призма

Различают *призмы прямые* (рис.а) и *наклонные* (рис.б) (по углу наклона бокового ребра к плоскости основания).



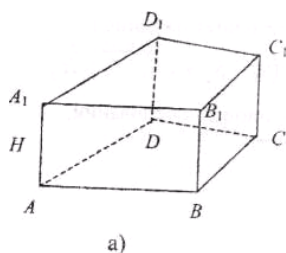
$$S_{\text{бок.поверх}} = P_{\perp} \cdot l_{\text{бок.ребра}}$$

l – длина бокового ребра

$P_{\perp}$ – периметр $\perp$ -ого ему сечения

$$S_{\text{полной}} = S_{\text{бок.поверх}} + 2 \cdot S_{\text{основ.}}$$

Прямая призма, основанием которой является правильный многоугольник, называется *правильной призмой*.



$$S_{\text{бок.поверх}} = P_{\text{основ.}} \cdot l_{\text{бок.ребра}} \quad (l = H)$$

$$V_{\text{призмы}} = S_{\text{основ.}} \cdot H$$

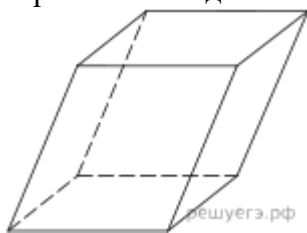
$$V_{\text{прям.призмы}} = S_{\text{основ.}} \cdot l_{\text{бок.ребра}}$$

$$S_{\text{призмы}} = S_{\text{бок.поверх}} + 2 \cdot S_{\text{основ.}}$$

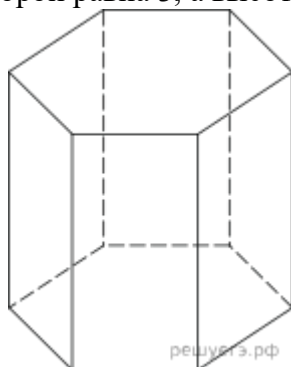
Заметим, что многогранник называется *правильным*, если все его грани - равные правильные многоугольники и из каждой вершины выходит одно и то же число ребер.

Упражнения

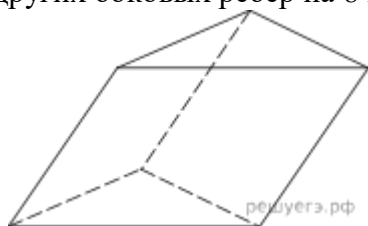
1. Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 1 и острым углом 60° . Одно из ребер параллелепипеда составляет с этой гранью угол в 60° и равно 2. Найдите объем параллелепипеда.



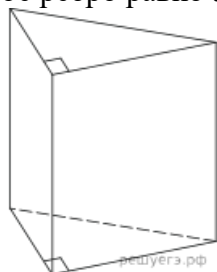
2. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 3, а высота — 6.



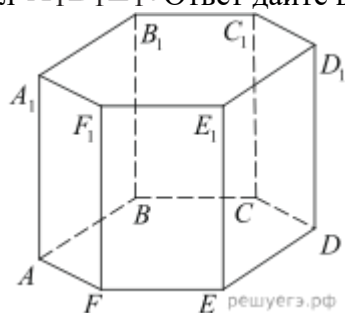
3. В треугольной призме две боковые грани перпендикулярны. Их общее ребро равно 15 и отстоит от других боковых ребер на 8 и 15. Найдите площадь боковой поверхности этой призмы.



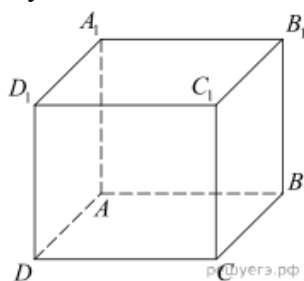
4. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, боковое ребро равно 5. Найдите объем призмы.



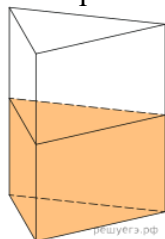
5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 43. Найдите угол $A_1 B_1 E_1$. Ответ дайте в градусах.



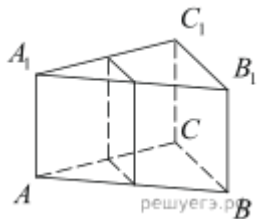
6. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $CA_1 = 2A_1 D_1$. Найдите угол между диагоналями BD_1 и AC_1 . Ответ дайте в градусах.



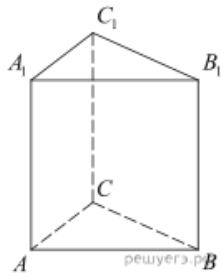
7. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 112 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить в другой сосуд такой же формы, у которого сторона основания в 4 раза больше, чем у первого? Ответ выразите в сантиметрах.



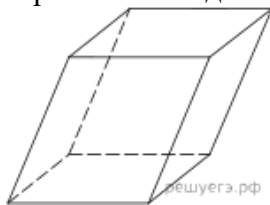
8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 6, боковые рёбра равны 16. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB , AC , A_1B_1 и A_1C_1 .



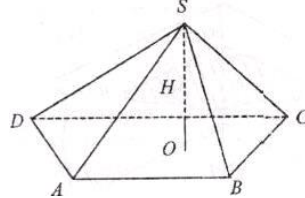
9. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A , B , C , B_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 8.



10. Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 1 и острым углом 45° . Одно из ребер параллелепипеда составляет с этой гранью угол в 45° и равно 5. Найдите объем параллелепипеда.

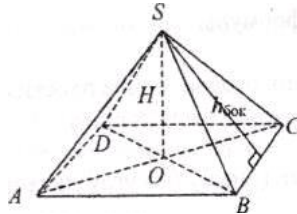


Пирамида



Правильная пирамида

Пирамида считается *правильной*, если основание ее – правильный многоугольник, а вершина проектируется в центр этого многоугольника.



Формулы:

$$S_{\text{бок.поверх}} = \frac{1}{2} \cdot P_{\text{основ.}} \cdot h_{\text{бок.}}$$

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{основ.}} \cdot H$$

$P_{\text{основ.}}$ - периметр основания,

$h_{\text{бок.}}$ - апофема пирамиды;

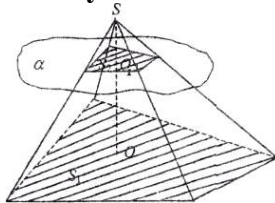
Тетраэдр

$$S_{\text{полной}} = a^2 \sqrt{3}$$

a – сторона

$$V_{\text{тетраэдра}} = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot a^3$$

Правильная усеченная пирамида



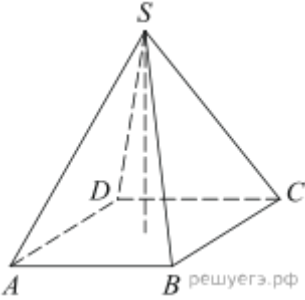
Теорема. Если в пирамиде проведено сечение, параллельное основанию, то площади оснований обеих пирамид (т.е. площади оснований усеченной пирамиды) относятся, как квадраты соответствующих высот.

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{(O_1S)^2}{(OS)^2} = \frac{h_2^2}{h_1^2}$$

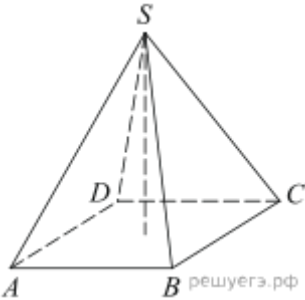
Существует пять правильных многогранников: тетраэдр (4 треугольника, 6 ребер, 4 вершины), куб (6 квадратов, 12 ребер, 8 вершин), октаэдр (8 треугольников, 12 ребер, 6 вершин), додекаэдр (12 пятиугольников, 30 ребер, 20 вершин), икосаэдр (20 треугольников, 30 ребер, 12 вершин).

Упражнения

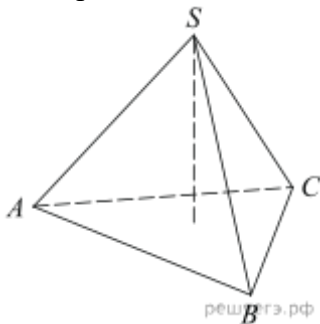
1. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S вершина, $SD = 5$, $AC = 8$. Найдите длину отрезка SO .



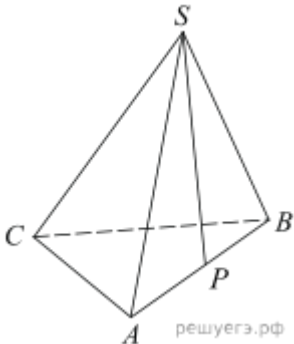
2. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 8, боковое ребро равно 10. Найдите ее объем.



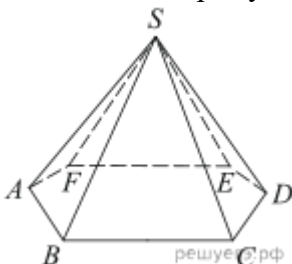
3. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 3, а высота равна $6\sqrt{3}$.



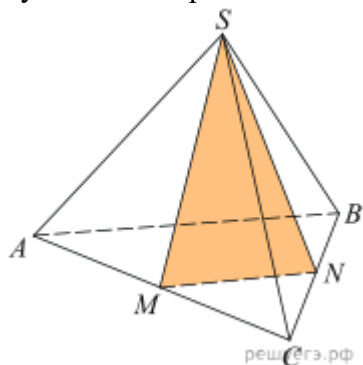
4. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ P — середина ребра AB , S — вершина. Известно, что $BC=5$, а $SP=6$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



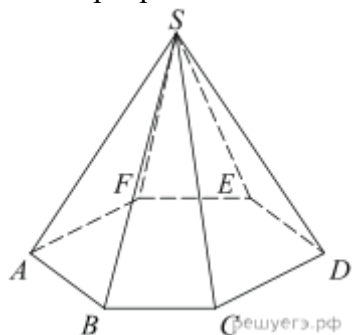
5. Во сколько раз увеличится объем пирамиды, если ее высоту увеличить в тридцать один раз?



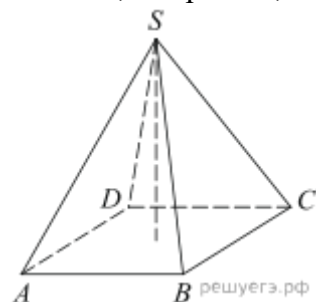
6. От треугольной пирамиды, объем которой равен 40, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объем отсеченной треугольной пирамиды.



7. Объем правильной шестиугольной пирамиды 2592. Сторона основания равна 12. Найдите боковое ребро.

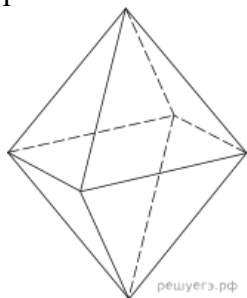


8. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S вершина, $SO = 4$, $AC = 6$. Найдите боковое ребро SC .



9. Площадь боковой поверхности пятиугольной пирамиды равна 13. Чему будет равна площадь боковой поверхности пирамиды, если все ее ребра уменьшить в 2 раза?

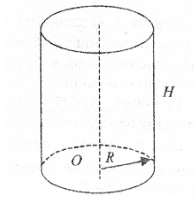
10. Во сколько раз увеличится площадь поверхности октаэдра, если все его ребра увеличить в 3 раза?



Круглые тела

Определение. Круглые тела - тела, ограниченные поверхностями вращения.

Цилиндр

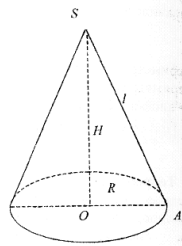


Формулы:

$$S_{\text{бок.поверх}} = 2\pi \cdot R \cdot H, \quad V = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$S_{\text{цилиндра}} = 2\pi R \cdot (R + H)$$

Прямой круговой конус



Формулы:

$$S_{\text{бок.поверхконуса}} = \pi R \cdot l,$$

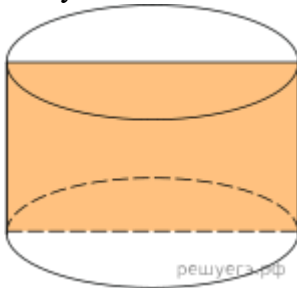
$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{основ.}} \cdot H,$$

$$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2,$$

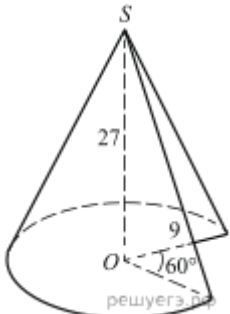
$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

Упражнения

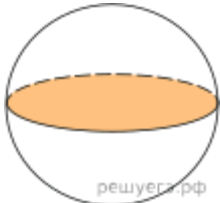
1. Площадь осевого сечения цилиндра равна 7. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π .



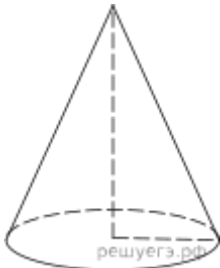
2. Найдите объем V части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите V/π .



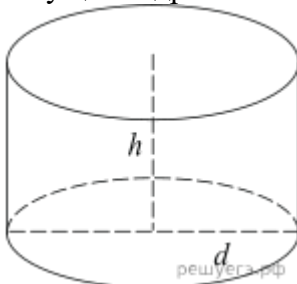
3. Площадь большого круга шара равна 3. Найдите площадь поверхности шара.



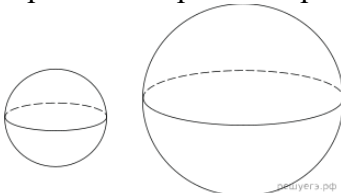
4. Во сколько раз увеличится объем конуса, если радиус его основания увеличится в 3 раза, а высота останется прежней?



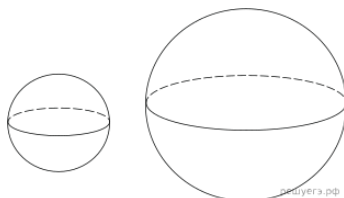
5. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 15π , а диаметр основания равен 5. Найдите высоту цилиндра.



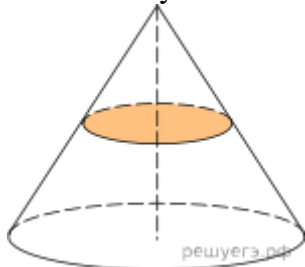
6. Дано два шара. Радиус первого шара в 45 раз больше радиуса второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?



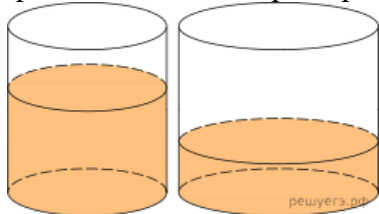
7. Радиусы трех шаров равны 6, 8 и 10. Найдите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.



8. Объем конуса равен 16. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.



9. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 147 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 7 раз больше диаметра первого? Ответ дайте в сантиметрах.



10. Диаметр основания конуса равен 30, а угол при вершине осевого сечения равен 90° . Вычислите объем конуса, деленный на π .

