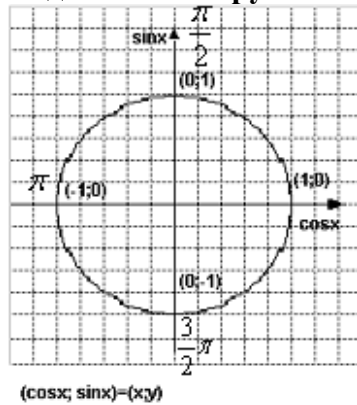


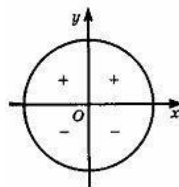
ВСПОМОГАЛКА ПО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ

Единичная окружность

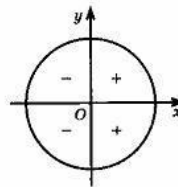


Знаки тригонометрических функций

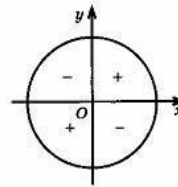
Знаки синуса



Знаки косинуса



Знаки тангенса
и котангенса



Основные углы

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-



формулы ПРИВЕДЕНИЯ

1. Меняем ли функция на КОфункцию?

Если угол откладывается от 90° ($\pi/2$) или 270° ($3\pi/2$) $\rightarrow$ МЕНЯЕМ



$$\begin{array}{ll} \sin \alpha \rightarrow \cos \alpha & \operatorname{tg} \alpha \rightarrow \operatorname{ctg} \alpha \\ \cos \alpha \rightarrow \sin \alpha & \operatorname{ctg} \alpha \rightarrow \operatorname{tg} \alpha \end{array}$$

Если угол откладывается от 180° (π) или 360° (2π) $\rightarrow$ НЕ МЕНЯЕМ



2. Какой знак?

- тут смотри, в какую четверть попадает угол в скобках исходной функции
- по этой четверти определи знак исходной функции

примеры:

$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha$
$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha$
$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg}(2\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(2\pi + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$

sin	cos
+	+
-	-
-	+
+	-
tg	ctg
+	+
-	-
-	+
+	-

Четность тригонометрических функций

$$\begin{aligned}\sin(-x) &= -\sin x \\ \cos(-x) &= \cos x - \text{четная функция!} \\ \operatorname{tg}(-x) &= -\operatorname{tg} x \\ \operatorname{ctg}(-x) &= -\operatorname{ctg} x\end{aligned}$$

ОДЗ

Функция	Условие
$y = \frac{g(x)}{f(x)}$	$f(x) \neq 0$
$y = \sqrt{f(x)}$	$f(x) \geq 0$
$y = \log_{g(x)} f(x)$	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$
$y = \operatorname{tg} f(x)$	$f(x) \neq \pi/2 + \pi n$
$y = \operatorname{ctg} f(x)$	$f(x) \neq \pi n$

Исходное уравнение

Равносильное уравнение (система)

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x) & \Leftrightarrow & f(x) + C = g(x) + C \\ f(x) \cdot g(x) &= 0 & \Leftrightarrow & \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases} \\ \frac{f(x)}{g(x)} &= 0 & \Leftrightarrow & \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases} \\ f^2(x) + g^2(x) &= 0 & \Leftrightarrow & \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Основные тождества и их следствия

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}; \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}; \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Формулы двойного аргумента

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x = 2 \cdot \cos^2 x - 1$$

Формулы сложения и вычитания аргументов

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Формулы преобразования сумм в произведение

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Простейшие тригонометрические уравнения
Решение простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	Общее решение	Частные случаи		
		$a = -1$	$a = 0$	$a = 1$
$\sin x = a$ $ a \leq 1$	$\begin{cases} x = \arcsin a + 2\pi n \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k \end{cases}$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$
$\cos x = a$ $ a \leq 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n$	$x = \pi + 2\pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = 2\pi n$
$\operatorname{tg} x = a$ $a \in (-\infty; \infty)$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n$ ОДЗ: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$
$\operatorname{ctg} x = a$ $a \in (-\infty; \infty)$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$ ОДЗ: $x \neq \pi n$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$

Взаимно обратные функции

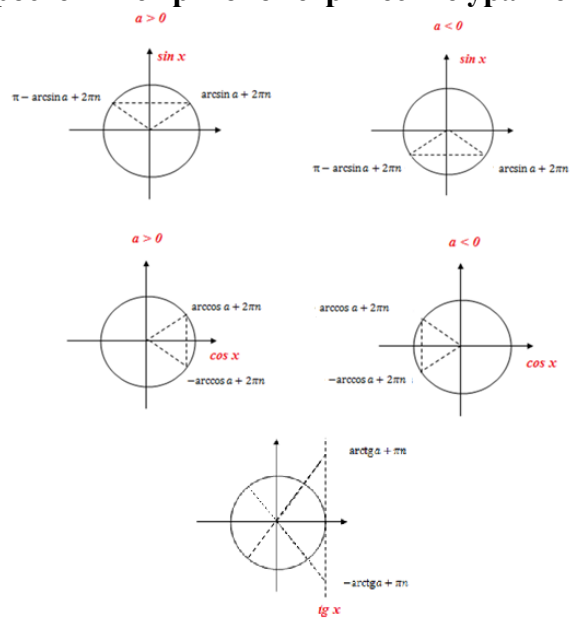
$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$$

Простейшие тригонометрические уравнения



Методы решения тригонометрических уравнений:

1. Вынесение общего множителя за скобки (один одночлен)

2. Замена переменной $a \cdot f^2(x) + b \cdot f(x) + c = 0$ (три одночлена)

- Если $f(x) = \sin x$ или $f(x) = \cos x$, то необходимо указать значения для новой переменной, т.е. отрезок $t \in [-1; 1]$.
- Если $f(x) = \operatorname{tg} x$ или $f(x) = \operatorname{ctg} x$, то ограничений для $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ не существует.

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$

Дискриминант: $D = b^2 - 4ac$

Формула корней: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Частные случаи:

1) Если $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1, x_2 = c/a$.

2) Если $a = b + c$, то $x_1 = -1, x_2 = -c/a$.

Теорема Виета

Приведенное квадратное уравнение: $x^2 + bx + c = 0$

$x_1 + x_2 = -b$

$x_1 \cdot x_2 = c$

3. Группировка (четыре одночлена)

4. Однородное уравнение I степени:

$$a \sin x + b \cos x = 0 \quad | : \cos x \neq 0$$

$$a \operatorname{tg} x + b = 0$$

5. Однородное уравнение II степени:

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0 \quad | : \cos^2 x \neq 0$$

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$$

6. Уравнения вида $a \sin x + b \cos x = c$ (замена)

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Проверяй подстановкой в уравнение корень $x = \pi + 2\pi \cdot n, n \in \mathbb{Z}$