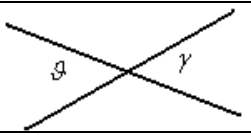
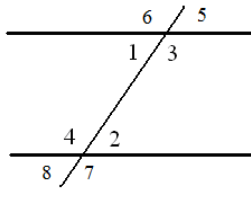
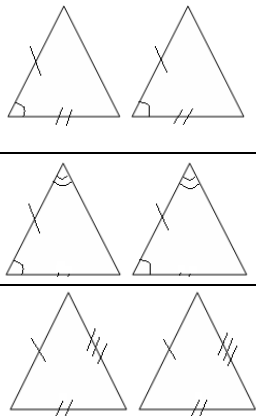
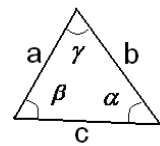
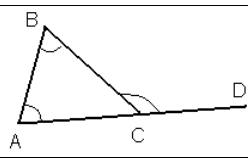
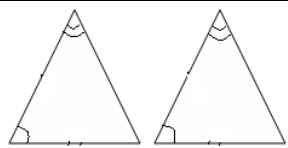


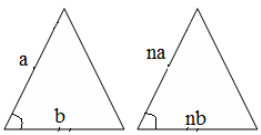
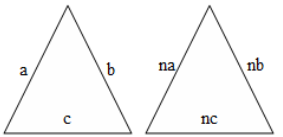
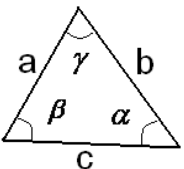
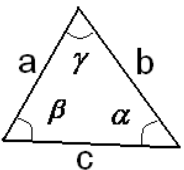
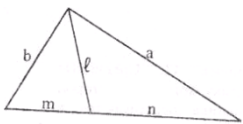
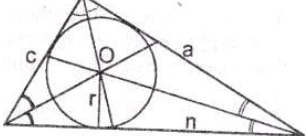
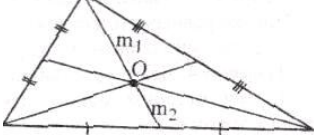
Вспомогалки по планиметрии

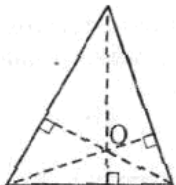
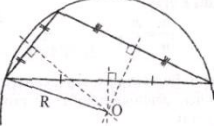
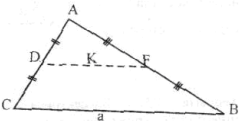
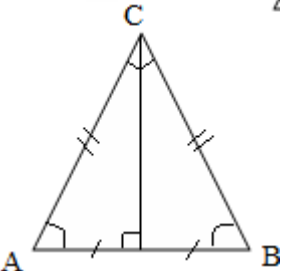
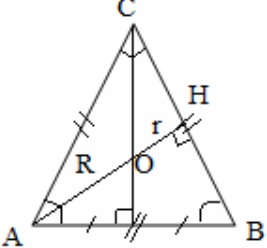
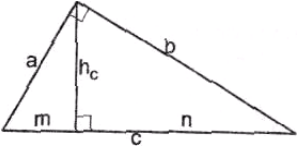
Угловые соотношения в плоских фигурах

Теорема. Сумма смежных углов равна 180°. α и β – смежные углы Теорема. Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны.	
Теорема. Вертикальные углы равны. γ и ϑ – вертикальные углы	
Теорема. Если две прямые параллельности пересечены секущей, то 1. Накрест лежащие углы равны; 2. Соответственные углы равны; 3. Сумма внутренних односторонних углов равна 180°. $\angle 1$ и $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$ – внутренние накрест лежащие $\angle 2$ и $\angle 3$, $\angle 1$ и $\angle 4$ – внутренние односторонние углы $\angle 5$ и $\angle 2$, $\angle 1$ и $\angle 8$ – соответственные углы	

Треугольники

Признаки равенства треугольников: Два треугольника равны между собой, если: 1. Две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого; 2. Сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим углам другого. 3. Три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого.	
Теорема. Сумма углов треугольника равна 180°.	$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ 
Теорема. Против большей стороны в треугольнике лежит больший угол. Против равных сторон лежат равные углы.	
Теорема. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним. $\angle BCD = \angle BAC + \angle ABC$	
Подобие треугольников Два треугольника подобны, если: 1. Два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника;	

2. Две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы образованные этими сторонами равны; 3. Стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника. Теорема. Отношение периметров двух подобных треугольников равно отношению сходственных сторон (коэффициенту подобия). Теорема. Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия. Теорема. Если у двух треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания. Теорема. Если у двух треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания.	  $\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle A_1B_1C_1}} = n$ $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = n^2$
Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов. $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ R - радиус описанной окружности	
Теорема косинусов. $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha,$ α - угол между b и c	
Биссектриса делит угол пополам. Теорема. Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные сторонам, прилежащим к углу. $\frac{m}{n} = \frac{b}{a}$	
Теорема. $S = r \cdot p = \frac{r}{2} \cdot (a + b + c)$ $a + b + c = 2p$ — периметр, $\frac{a + b + c}{2} = p$ — полупериметр. r - радиус вписанной окружности	
Медиана — отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны. Теорема. Медианы треугольника пересекаются в одной точке - центре тяжести треугольника. Центр тяжести делит медианы в отношении 2:1, считая от вершины. $\frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{1}$ Теорема. Медиана треугольника разбивает его на два равновеликих треугольника.	

Высота – перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону.	
Теорема. Середины перпендикуляры сторон треугольника пересекаются в одной точке – центре описанной окружности. Теорема. $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ R – радиус описанной окружности O – центр.	
Средняя линия – отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. Теорема. Средняя линия треугольника параллельна третьей его стороне и равна ее половине. $K = \frac{1}{2} \cdot a; \quad DF \parallel CB$	
Равнобедренный треугольник $AC = BC$ – боковые стороны, AB – основание, C – вершина. Треугольник с двумя равными сторонами. Теорема. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Теорема. В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.	
Правильный треугольник (равносторонний) Правильный треугольник – это треугольник, у которого все стороны равны и все углы по 60°. Теорема. Для равностороннего треугольника центры вписанной и описанной окружностей, центр тяжести и ортоцентр совпадают. R – радиус описанной окружности около правильного треугольника со стороной a. r – радиус вписанной окружности около правильного треугольника со стороной a. $R = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ $a = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3}$ $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$	 $OA=R, OH=r$
Прямоугольный треугольник Теорема. Высота, опущенная из вершины прямого угла треугольника на гипотенузу, есть среднее геометрическое отрезков, на которые делится каждый катет. $h_c = \sqrt{m \cdot n}, \quad h_c^2 = m \cdot n$	

Теорема. Катет равен среднему пропорциональному между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.

$$a^2 = c \cdot m, \quad b^2 = c \cdot n$$

Теорема. Напротив угла в 30° лежит катет равный половине гипотенузы.

Соотношение между сторонами и углами прямоугольного треугольника

$\sin$ - отношение между противолежащим катетом и гипотенузой;

$\cos$ - отношение между прилежащим катетом и гипотенузой;

tg - отношение между противолежащим и прилежащим катетами;

ctg - отношение между прилежащим и противолежащим катетами.

Теорема Пифагора. Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

где a, b - катеты, c - гипотенуза.

Теорема. Центр описанной вокруг прямоугольного треугольника окружности лежит на середине гипотенузы.

$$R = \frac{a}{2}, \quad a - \text{гипотенуза}$$

Теорема. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник

окружности равен $r = \frac{b+c-a}{2}$, a - гипотенуза, b, c - катеты

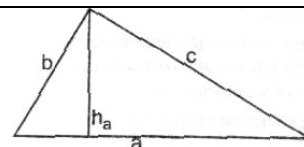
Теорема. Медиана, проведенная из вершины прямого угла равна половине гипотенузы.

Подобие прямоугольного треугольника

Теорема. Прямоугольные треугольники подобны, если у них по равному острому углу.

Волшебные стороны

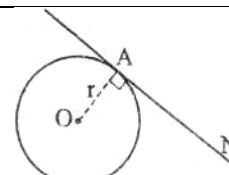
Катет	Катет	Гипотенуза
3	4	5
5	12	13
6	8	10
10	24	26



Окружность

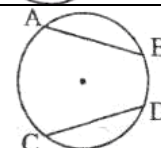
Теорема. Прямая, проходящая через точку окружности, тогда и только тогда касается окружности, когда она перпендикулярна к радиусу, проведенному в эту точку.

$$OA \perp AN \Rightarrow AN - \text{касательная.}$$

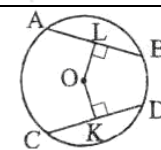


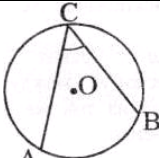
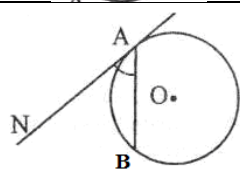
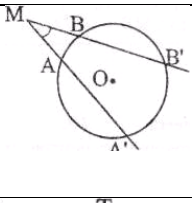
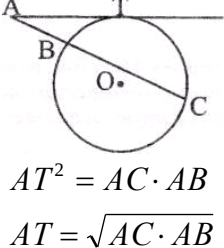
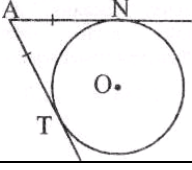
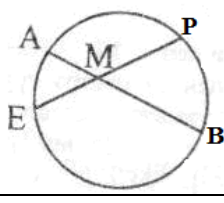
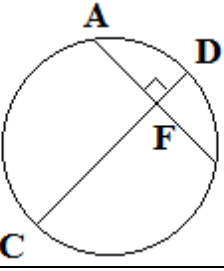
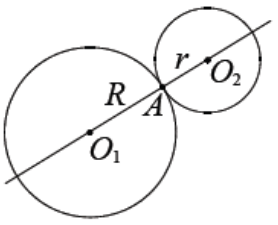
Теорема. Равные хорды стягивают равные дуги и обратно.

$$AB = CD \Leftrightarrow \cup AB = \cup CD$$

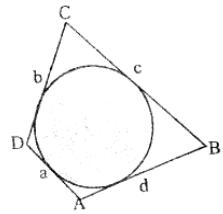
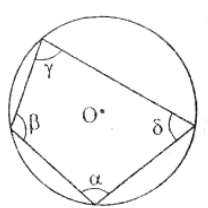
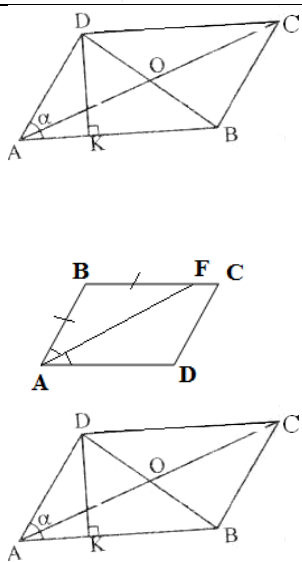


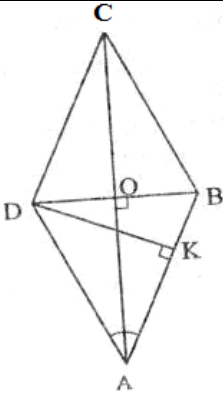
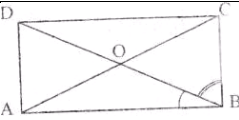
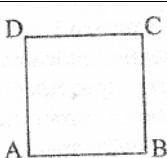
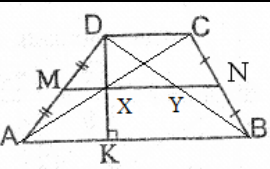
Теорема. Хорды, равноотстоящие от центра, равны, и наоборот. $OL = OK \Leftrightarrow AB = CD$

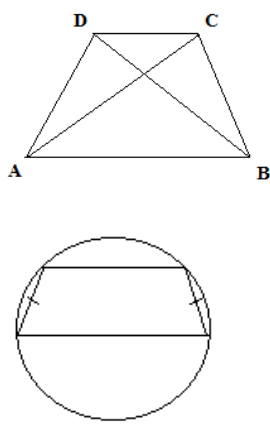


Теорема. Угол, вписанный в окружность, измеряется половиной дуги, на которую он опирается. $\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AB$ <i>Следствие.</i> Угол, опирающийся на диаметр - прямой.	
Теорема. Угол между касательной и секущей, проходящей через точку касания, измеряется половиной дуги окружности, лежащей внутри измеряемого угла. $\angle BAN = \frac{1}{2} \cup AB$	
Теорема. Угол, образованный двумя секущими, проведенными из внешней точки, измеряется полуразностью дуг и A'B' и AB, лежащих внутри его. $\angle AMB = \frac{1}{2} \cdot (\cup A'B' - \cup AB)$	
Теорема. Произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной или касательная равна среднему геометрическому между секущей, проведенной из той же точки, и ее внешней частью. <i>Следствие.</i> Для любой секущей, проведенной через данную точку A, произведение ее длины на внешнюю часть постоянно: $AC \cdot AB = C(const)$.	 $AT^2 = AC \cdot AB$ $AT = \sqrt{AC \cdot AB}$
Теорема. Две касательные к окружности, проведенные из одной точки, равны между собой: $AN=AT$	
Теорема. Если через точку (т. M, см. рис.), взятую внутри круга, проведено сколько угодно хорд (AB, AP, ...), то произведение отрезков каждой хорды есть число постоянное для всех хорд. $AM \cdot MB = EM \cdot MP = \dots = const$	
Теорема. Радиус (диаметр) CD, перпендикулярный хорде AB, делит хорду пополам. $CD \perp AB \Rightarrow AF = FB$	
Теорема. При любом способе касания точка касания и центры окружностей лежат на одной прямой.	

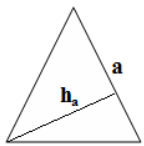
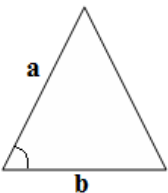
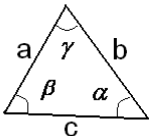
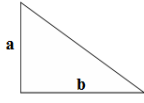
Многоугольники

Теорема. Сумма внутренних углов выпуклого n - угольника равна $180^\circ \cdot (n - 2)$.	
Правильный многоугольник	
Теорема. Каждый угол правильного n - угольника равен $\alpha_n = \frac{180^\circ (n-2)}{n}$. Теорема. Окружность, вписанная в правильный n - угольник, касается всех сторон n - угольника в их серединах. Теорема. Центр окружности, описанной около правильного n - угольника совпадает с центром окружности, вписанной в тот же n - угольник. Теорема. Длина стороны правильного n - угольника, вписанного в окружность радиуса R равна $a = 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$. Теорема. Длина стороны правильного n - угольника, описанного около окружности радиуса r равна $a = 2r \cdot \tan \frac{180^\circ}{n}$.	
Четырехугольники	
Теорема. В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда когда, $a+c=b+d$	
Теорема. Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда $\alpha + \gamma = \beta + \delta$	
Параллелограмм Теорема. Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Теорема. У параллелограмма противоположные стороны равны, противоположные углы равны. Теорема. Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник. $\angle BAF = \angle FAD \Rightarrow AB = BF$ Теорема. Диагональ параллелограмма разбивает его на два равновеликих треугольника. $S_{ADC} = S_{ACB}$ $S_{ADB} = S_{BDC}$ Формулы: $S = DK \cdot AB = AD \cdot AB \cdot \sin \alpha$ $AC^2 + BD^2 = 2 \cdot (AB^2 + AD^2)$	

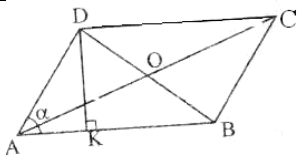
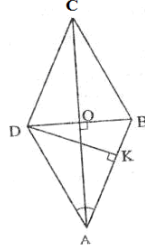
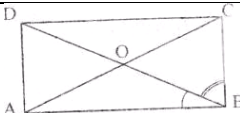
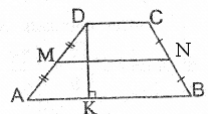
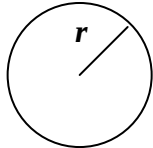
Ромб Определение. Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны. Теорема. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов. Формулы: $AC^2 + BD^2 = 4 \cdot AD^2 \quad S = AD^2 \cdot \sin \angle A = AD \cdot DK = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AC$ Заметим, что ромб – параллелограмм, поэтому свойства параллелограмма сохраняются.	
Прямоугольник Определение. Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые. Теорема. Диагонали прямоугольника равны. Формулы: $S = AB \cdot AD$ Посмотри!!! Прямоугольник - это параллелограмм, поэтому свойства параллелограмма сохраняются.	
Квадрат Определение. Квадрат - частный случай прямоугольника. Свойства квадрата: • все стороны равны; • все углы прямые; • диагонали равны и пересекаются под прямым углом и являются биссектрисами его углов. Формулы: $S = AB^2 = \frac{1}{2} \cdot AC^2$	
Трапеция Определение. Трапецией называется четырехугольник, у которого только две противоположные стороны параллельны. где MN — <i>средняя линия</i> трапеции; Определение. Если у трапеции боковые стороны равны, то такая трапеция называется <i>равнобокой (равнобедренной)</i>. Теорема. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме. $MN = \frac{AB + DC}{2}$ Теорема. Середина диагоналей трапеции параллельна основаниям и равна их полуразности. $XY = \frac{AB - DC}{2}$ Теорема. Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на большее основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали – полусумме оснований (средней линии). $AK = \frac{AB - DC}{2}$	

$BK = \frac{AB - DC}{2}$ Теорема. Трапеция разбивается диагоналями на два равновеликих треугольника (примыкающих к боковым сторонам $S_{ADF} = S_{BFC}$) и два подобных треугольника (примыкающих к основаниям $\triangle AFB$ и $\triangle DFC$). Теорема. Трапеция вписана в некоторую окружность тогда и только тогда, когда она является равнобедренной. Формулы: $S = \frac{1}{2} \cdot DK \cdot (AB + DC) = MN \cdot DK$	
---	---

Площади фигур Треугольники

Площадь треугольника равна половине произведения его сторон на проведенную к ней высоту.	$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$	
Площадь треугольника равна половине произведения двух любых его сторон на синус угла между ними.	$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$	
Формула Герона $S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$		
$S = r \cdot p = \frac{r}{2} \cdot (a + b + c)$	$a + b + c = 2p$ — периметр, $\frac{a + b + c}{2} = p$ — полупериметр.	
Площадь треугольника равна произведению трех его сторон, деленному на учетверенный радиус описанной окружности.	$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$	
Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов.	$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$	

Четырехугольники

Четырехугольник	$S = \sqrt{(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c) \cdot (p-d)},$ где p - полупериметр	
Квадрат	$S = a^2$	
Параллелограмм	$S = DK \cdot AB$ $S = AD \cdot AB \cdot \sin \alpha$	
Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны.	$S = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AC$	
Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые.	$S = AB \cdot AD$	
Трапецией называется четырехугольник, у которого только две противоположные стороны параллельны. где MN — средняя линия трапеции.	$S = \frac{1}{2} \cdot BK \cdot (AD + BC)$ $S = MN \cdot BK$	
Площадь выпуклого четырехугольника	$S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha,$ где α - угол между d_1 и d_2	
Круг	$S = \pi r^2$	
Круговой сектор	$S = \frac{\pi r^2}{360^\circ} \cdot \alpha$	