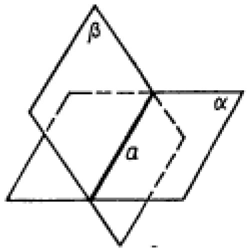
СТЕРЕОМЕТРИЯ

Основные определения

Аксиома 1. Через любые три точки, не лежащих на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

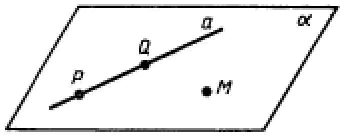
Аксиома 2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

Аксиома 3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

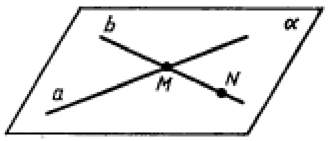


$$A \in \alpha, B \in \beta \to \alpha \cap \beta = a, A \in \alpha$$

Следствия 1. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

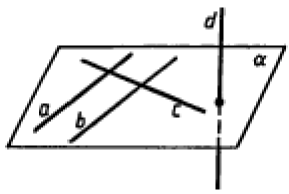


Следствие 2. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.



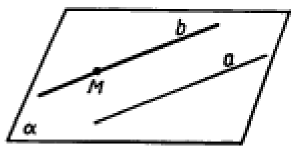
Параллельность прямой и плоскости

Определение. Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

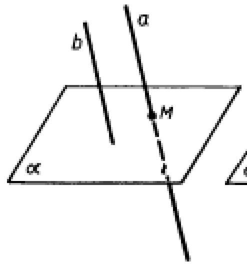


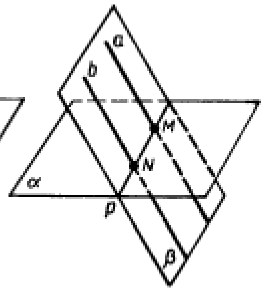
$$a \in \alpha, b \in \alpha, a \cap b \to a \parallel b$$

Теорема. Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

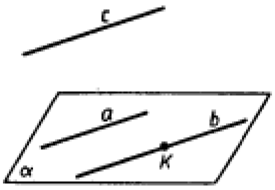


Лемма о параллельности трех прямых. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то другая прямая пересекает эту плоскость.





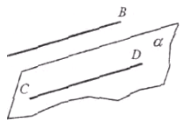
Теорема о трех параллельных прямых. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.



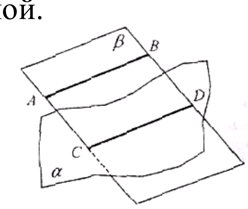
Параллельность прямой и плоскости

Определение. Прямая и плоскость называются параллельными, если не имеют общих точек.

Признак параллельности прямой и плоскости. Если прямая параллельна какой-нибудь прямой, расположенной на плоскости, то она параллельна этой плоскости.

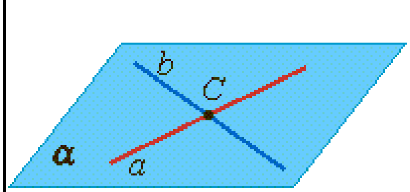
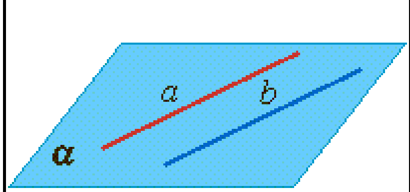
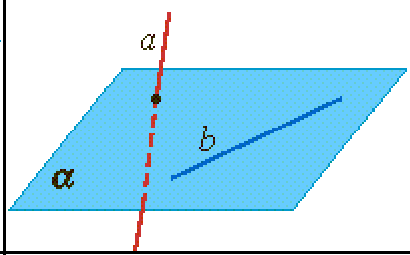


Утверждение 1. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, то линия пересечения параллельна первой прямой.



Утверждение 2. Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.

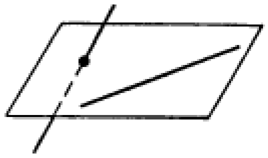
Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между прямыми.

		
Пересекающиеся прямые: лежат в одной плоскости, имеют одну общую точку.	**Параллельные прямые:** лежат в одной плоскости, не имеют общих точек (не пересекаются)	**Скрещивающиеся прямые:** не лежат в одной плоскости, не имеют общих точек (не пересекаются)

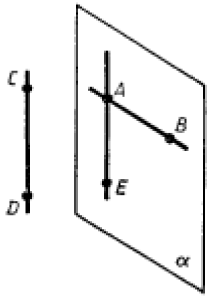
Скрещивающиеся прямые

Определение. Две прямые называются скрещивающимися, если не лежат в одной плоскости.

Признак скрещивающихся прямых. Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.

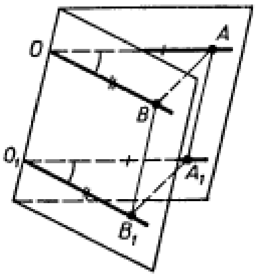


Теорема. Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

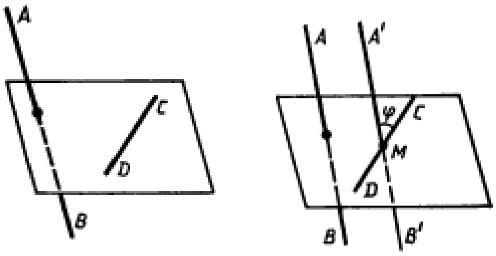


Определение. Два луча, не лежащие на одной прямой, называются сонаправленными, если они расположены в одной полуплоскости и параллельны.

Теорема. Если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы равны.



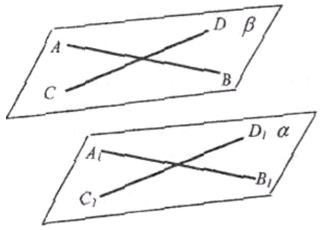
Угол между скрещивающимися прямыми



Параллельность плоскостей

Определение. Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

Теорема (признак параллельности двух плоскостей). Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

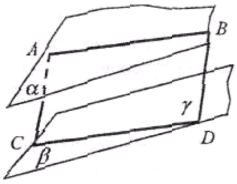


$$\left.\begin{matrix} AB \parallel A_1B_1 \\ CD \parallel C_1D_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$$

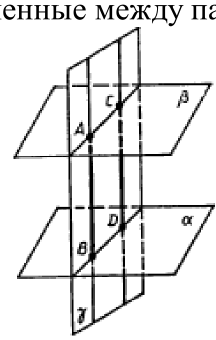
Свойства параллельных плоскостей.

1°. Если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то линии пересечения параллельны.

$$\alpha \parallel \beta \Rightarrow AB \parallel CD$$



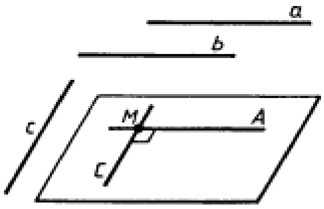
2°. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.



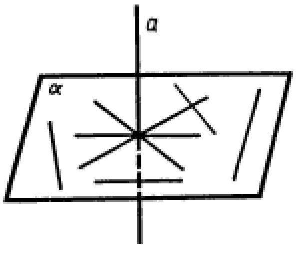
Перпендикулярность прямых и плоскостей

Перпендикулярные прямые в пространстве

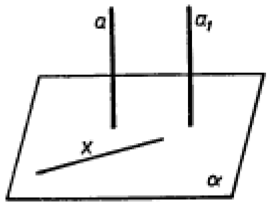
Лемма. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна в этой прямой.



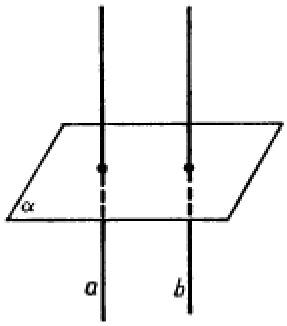
Определение. Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.



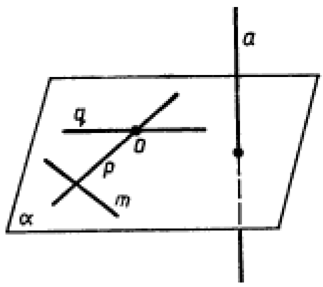
Теорема. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.



Теорема. Если две параллельные прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны.

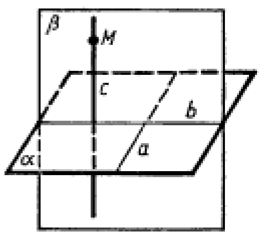


Теорема (признак перпендикулярности прямой и плоскости). Если прямая перпендикулярна к двум непересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.



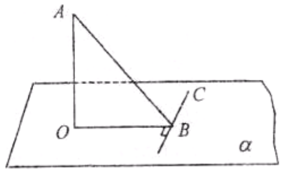
$$\left.\begin{matrix} OK \perp AB \\ OK \perp CD \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow OK \perp \alpha$$

Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости. Через любую точку пространвтсва проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.



Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью.

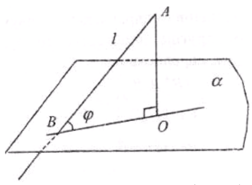
Теорема о трех перпендикулярах. Для того, чтобы прямая, лежащая в плоскости, была перпендикулярная наклонной, необходимо и достаточно, чтобы эта прямая была перпендикулярна проекции наклонной.



$$\begin{cases} OB - проекция\ AB\ на\ \alpha \\ OB \perp BC \end{cases}$$

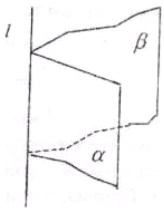
$$\Leftrightarrow AB \perp BC$$

Определение. Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

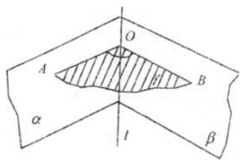


$$\angle ABO = \varphi = (l, \alpha)$$

Определение. *Двугранным углом* называется фигура, образованная двумя полуплоскостями, имеющими общую граничную прямую.



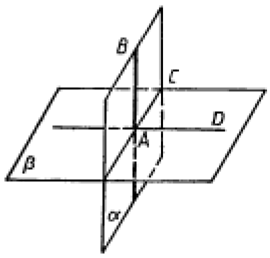
Полуплоскости называются гранями, а их общая прямая - ребром двугранного угла.
α, β - полуплоскости, l - прямая.



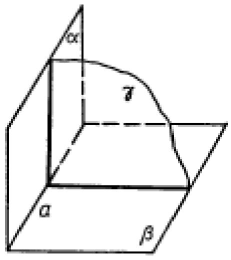
Определение. $\angle \alpha\ l \beta$ -двугранный угол, $\gamma \perp l \Rightarrow \angle AOB$ - линейный угол двугранного угла $\angle \alpha\ l \beta$

Определение. Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

Теорема (признак перпендикулярности двух плоскостей). Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.



Следствие. Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.



Параллелепипед

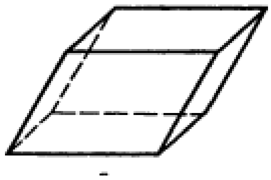
Призма, в основании которой лежит параллелограмм, называется *параллелепипедом.*

Свойства параллелепипеда:

- противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны;
- диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Параллелепипед

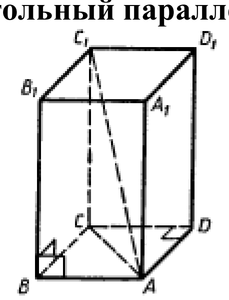
Многогранник, в основании которой лежит параллелограмм, называется *параллелепипедом.*



Свойства параллелепипеда:

- противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны;
- диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Прямоугольный параллелепипед



Свойства прямоугольного параллелепипеда:

- гранями являются прямоугольники (6 граней);
- все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда – прямые.

Теорема. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + DD_1^2$

Теорема. Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

<u>Формулы:</u>

$V = a \cdot b \cdot c = S \cdot h,$

$S = ab - \textit{площадь основания}$

$h - \textit{высота}$

$S_{\textit{полной}} = 2(ab + bc + ac)$

Куб

Определение. Куб – прямоугольный параллелепипед с равными ребрами.
Формулы:

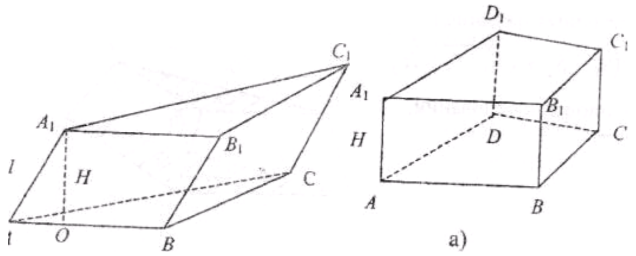
$V = a^3$

$S = 6a^2$ – *площадь поверхности*

$d = \sqrt{3}a$

Призма

Различают *призмы прямые* (рис.а) и *наклонные* (рис.б) (по углу наклона бокового ребра к плоскости основания).



$$S_{бок.поверх.} = P_{\perp} \cdot l_{бок.ребра}$$

l – *длина бокового ребра*

$P_{\perp}$ – *периметр* $\perp$ –*ого ему сечения*

$$S_{полной} = S_{бок.поверх.} + 2 \cdot S_{основ.}$$

Прямая призма, основанием которой является правильный многоугольник, называется *правильной призмой*.

$$S_{бок.поверх.} = P_{основ.} \cdot l_{бок.ребра} \quad (l = H)$$

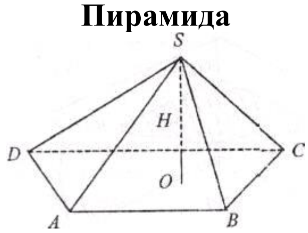
$$V_{призмы} = S_{основ.} \cdot H$$

$$V_{прям.призмы} = S_{основ.} \cdot l_{бок.ребра}$$

$$S_{призмы} = S_{бок.поверх.} + 2 \cdot S_{основ.}$$

Заметим, что многогранник называется *правильным*, если все его грани - равные правильные n-угольники и из каждой вершины выходит одно и то же число ребер.

Пирамида



S_{Δ} - площади боковых треугольных граней пирамиды.

Теорема. Если все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью ее основания равные углы (все боковые ребра пирамиды равны), то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания.

Теорема. Если все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом φ, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в основание.

$$S_{бок.поверх.} = \frac{S_{основания}}{\cos\varphi}$$

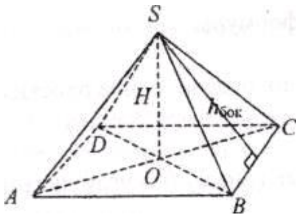
Теорема. Если боковая грань пирамиды перпендикулярна плоскости основания пирамиды, то высота пирамиды совпадает с высотой этой грани проведенной к стороне основания пирамиды.
Теорема. Если две грани пирамиды перпендикулярны основанию пирамиды, то высота пирамиды принадлежит прямой, по которой пересекаются плоскости этих граней.

<u>Формулы:</u>

$S_{пирамиды} = S_{основ.} + S_{бок.поверх.}$

Правильная пирамида

Пирамида считается *правильной*, если основание ее – правильный многоугольник, а вершина проектируется в центр этого многоугольника.



<u>Формулы:</u>

$$S_{бок.поверх.} = \frac{1}{2} \cdot P_{основ.} \cdot h_{бок.}$$

$$V_{пирамиды} = \frac{1}{3} \cdot S_{основ.} \cdot H$$

$P_{основ.}$ - периметр основания,

$h_{бок.}$ - апофема пирамиды;

Тетраэдр

$$S_{полной} = a^2\sqrt{3}$$

$$a - сторона$$

$$V_{тетрадра} = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot a^3$$

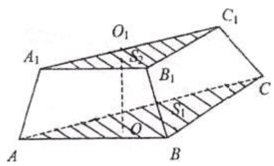
Усеченная пирамида

<u>Формулы:</u>

$$V_{ус.пирамиды} = \frac{1}{3} \cdot \left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right) \cdot H,$$

$$S_1, S_2 - площадь\ основания$$

$$H - высота$$



Правильная усеченная пирамида

Теорема. Если в пирамиде проведено сечение, параллельное основанию, то площади оснований обеих пирамид (т.е. площади оснований усеченной пирамиды) относятся, как квадраты соответствующих высот.

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{(O_1S)^2}{(OS)^2}=\frac{h_2^2}{h_1^2}$$

Существует пять правильных многогранников: тетраэдр (4 треугольника, 6 ребер, 4 вершины), куб (6 квадратов, 12 ребер, 8 вершин), октаэдр (8 треугольников, 12 ребер, 6 вершин), додекаэдр (12 пятиугольников, 30 ребер, 20 вершин), икосаэдр (20 треугольников, 30 ребер, 12 вершин).

__**Формулы:**__

$$S_{бок.поверх.}=(P+p)\cdot\frac{h_{бок.}}{2}$$

$$S_{бок.поверх.}=\frac{S_1-S_2}{\cos\alpha}$$

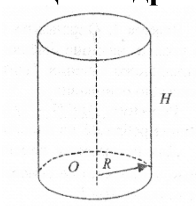
$$S_{полн.}=S_{бок.}+S_1+S_2$$

S_1 и S_2 – площадь верхнего и нижнего основания
α –мера двугранного угла при ребре нижнего основания
P - периметр нижнего основания,
p - периметр верхнего основания,
$h_{бок.}$ - апофема боковой грани.

Круглые тела

Определение. Круглые тела - тела, ограниченные поверхностями вращения.

Цилиндр

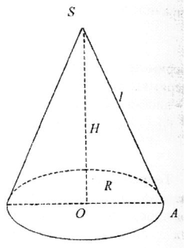


__**Формулы:**__

$$S_{бок.поверх.}=2\pi\cdot R\cdot H,\quad V=\pi\cdot R^2\cdot H$$

$$S_{цилиндра}=2\pi R\cdot(R+H)$$

Прямой круговой конус



Формулы:

$S_{бок.поверх.} = \pi R \cdot l,$

$S_{конуса} = \pi R \cdot (l + R)$

$S_{бок.поверх.усеч.конуса} = \pi \cdot (R_1 + R_2) \cdot l,$

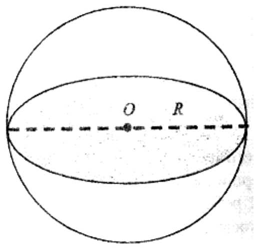
$V_{конуса} = \frac{1}{3} \cdot S_{основ.} \cdot H,$

$V_{усеч.конуса} = \frac{1}{3} \cdot \left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right) \cdot H$

R_1, R_2 *- радиусы оснований усеченного конуса,*

S_1, S_2 *- площади оснований усеченного конуса*

Сфера, шар



Уравнение сферы: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2,$
$A(x_0, y_0, z_0)$ *– центр сфера*

Теорема. Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

Формулы:

$S_{сферы} = 4\pi R^2,$

$V_{шара} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3,$

$S_{шаровогопояса} = 2\pi R \cdot h = S_{ш.п.},$

h *– высота пояса*

$S_{шаровогосегмента} = 2\pi R \cdot h,$

$h - высота\ сегмента$

$V_{шар.сектора} = \frac{1}{3} \cdot S_{ш.п.} \cdot R,$

$V_{шар.сегмента} = \frac{\pi h^2}{3} \cdot (3R - h),$

$h - высота\ шарового\ сегмента$