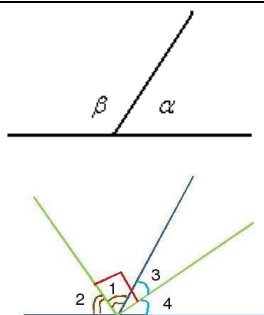
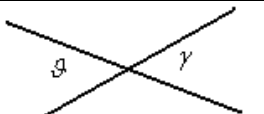
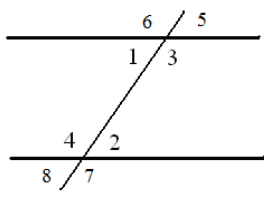
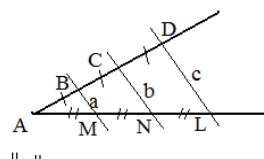
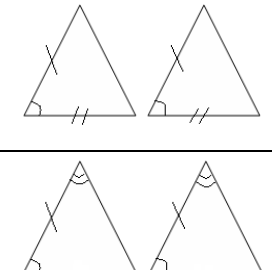
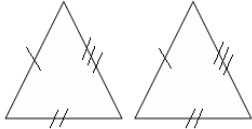
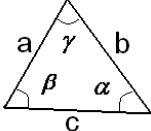
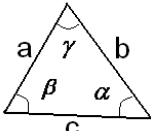
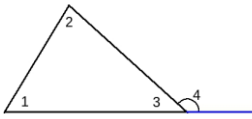
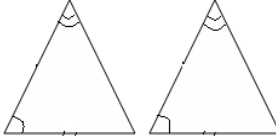
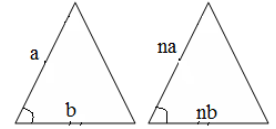
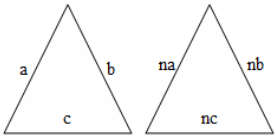
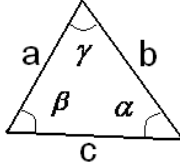


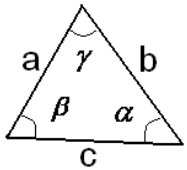
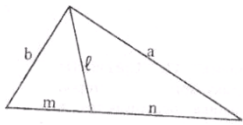
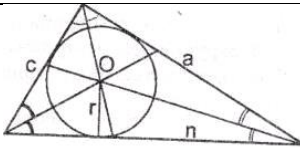
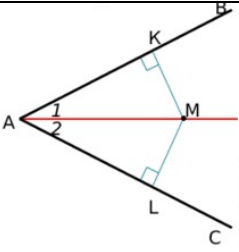
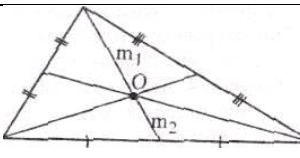
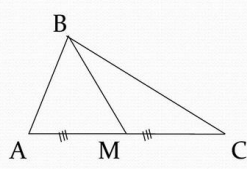
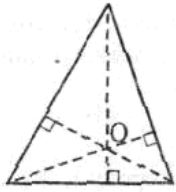
Модуль Геометрия»
Угловые соотношения в плоских фигурах

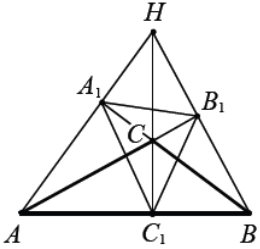
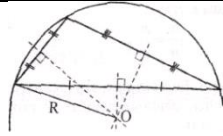
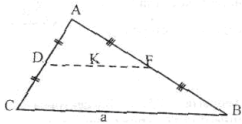
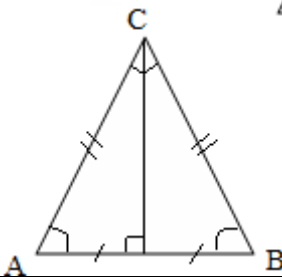
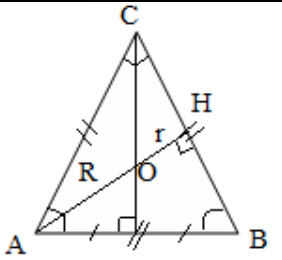
| | |
|---|---|
| <p>Теорема. Сумма смежных углов равна 180°. <i>α и β – смежные углы</i></p> <p>Теорема. Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны.</p> |  |
| <p>Теорема. Вертикальные углы равны. <i>γ и ϑ – вертикальные углы</i></p> |  |
| <p>Теорема. Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую, и только одну.</p> | |
| <p>Теорема. Две прямые, параллельные третьей, параллельны.</p> | |
| <p>Теорема. Если две прямые параллельности пересечены секущей, то</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Накрест лежащие углы равны; 2. Соответственные углы равны; 3. Сумма внутренних односторонних углов равна 180°. <p><i>$\angle 1$ и $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$ – внутренние накрест лежащие</i> <i>$\angle 2$ и $\angle 3$, $\angle 1$ и $\angle 4$ – внутренние односторонние углы</i> <i>$\angle 5$ и $\angle 2$, $\angle 1$ и $\angle 8$ – соответственные углы</i></p> <p>Теорема (обратная теорема). Если</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Накрест лежащие углы равны, то 2. Соответственные углы равны, то 3. Сумма внутренних односторонних углов равна 180°, <p>две прямые параллельности.</p> |  |
| <p>Теорема Фалеса. Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой стороне (параллельные прямые, пересекающие две данные прямые и отсекающие на одной прямой равные отрезки, отсекают равные отрезки и на другой прямой).</p> |  <p>$a \parallel b \parallel c \Rightarrow AB = BC = CD$ $AM = MN = NL$</p> |

Треугольники

| | |
|--|---|
| <p>Признаки равенства треугольников: Два треугольника равны между собой, если:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого; 2. Сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим углам другого. |  |
|--|---|

| | |
|--|--|
| <p>3. Три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого.</p> |  |
| <p>Теорема. Сумма углов треугольника равна 180°.</p> | $\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}$  |
| <p>Теорема. Для существования треугольников со сторонами a, b и c (наибольший отрезок - c) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие</p> $c < a + b.$ |  |
| <p>Теорема. Против большей стороны в треугольнике лежит больший угол. Против равных сторон лежат равные углы.</p> | |
| <p>Теорема. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.</p> $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$ |  |
| <p>Подобие треугольников Два треугольника подобны, если:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника; 2. Две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы образованные этими сторонами равны; 3. Стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника. <p>Теорема. Отношение периметров двух подобных треугольников равно отношению сходственных сторон (коэффициенту подобия).</p> <p>Теорема. Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.</p> <p>Теорема. Если у двух треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания.</p> <p>Теорема. Если у двух треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания.</p> <p>Теорема. Пусть в треугольнике ABC проведены высоты AA₁ и CC₁. Тогда треугольник A₁BC₁ подобен данному с коэффициентом подобия, равным $\cos B$.</p> |    $\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1 B_1 C_1}} = n$ $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1 B_1 C_1}} = n^2$ |
| <p>Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.</p> $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ <p>R- радиус описанной окружности</p> |  |

| | |
|--|--|
| <p>Теорема косинусов.</p> $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha,$ <p>α – угол между b и c</p> |  |
| <p>Биссектриса делит угол пополам.</p> <p>Теорема. Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположащую сторону на отрезки, пропорциональные сторонам, прилежащим к углу.</p> $\frac{m}{n} = \frac{b}{a}$ |  |
| <p>Теорема. Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке - центре вписанной в треугольник окружности.</p> <p>Теорема. $S = r \cdot p = \frac{r}{2} \cdot (a + b + c)$</p> $a + b + c = 2p \text{ — периметр,}$ $\frac{a + b + c}{2} = p \text{ — полупериметр.}$ <p>r - радиус вписанной окружности</p> |  |
| <p>Теорема. Каждая точка биссектрисы неразвёрнутого угла равноудалена от его сторон (находится на равном расстоянии).</p> <p>Обратная теорема. Каждая точка, лежащая внутри угла и равноудалённая от его сторон, лежит на биссектрисе этого угла.</p> |  |
| <p>Медиана – отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.</p> <p>Теорема. Медианы треугольника пересекаются в одной точке - центре тяжести треугольника. Центр тяжести делит медианы в отношении 2:1, считая от вершины.</p> $\frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{1}$ <p>Теорема. Медиана треугольника разбивает его на два равновеликих треугольника.</p> $S_{ABM} = S_{MBC}$ |   |
| <p>Высота – перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону.</p> <p>Теорема. Высоты треугольника пересекаются в одной точке – ортоцентре треугольника.</p> <p>Теорема. Высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами его ортотреугольника (треугольник, образованный основаниями высот).</p> |  |

| | |
|---|--|
| |  |
| <p>Теорема. Серединные перпендикуляры сторон треугольника пересекаются в одной точке – центре описанной окружности.</p> <p>Теорема. $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$</p> <p>$R$ – радиус описанной окружности O – центр.</p> |  |
| <p>Средняя линия – отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.</p> <p>Теорема. Средняя линия треугольника параллельна третьей его стороне и равна ее половине.</p> $K = \frac{1}{2} \cdot a; \quad DF \parallel CB$ |  |
| <p style="text-align: center;">Равнобедренный треугольник</p> <p>$AC = BC$ – боковые стороны, AB – основание, C – вершина.</p> <p>Треугольник с двумя равными сторонами.</p> <p>Теорема. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.</p> <p>Теорема. В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.</p> |  |
| <p style="text-align: center;">Правильный треугольник (равносторонний)</p> <p>Правильный треугольник – это треугольник, у которого все стороны равны и все углы по 60°.</p> <p>Теорема. Для равностороннего треугольника центры вписанной и описанной окружностей, центр тяжести и ортоцентр совпадают.</p> <p>R – радиус описанной окружности около правильного треугольника со стороной a.</p> <p>r – радиус вписанной окружности около правильного треугольника со стороной a.</p> $R = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ $a = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3}$ $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$ |  <p style="text-align: center;">$OA=R, OH=r$</p> |

Прямоугольный треугольник

Теорема. Высота, опущенная из вершины прямого угла треугольника на гипотенузу, есть среднее геометрическое отрезков, на которые делится каждый катет.

$$h_c = \sqrt{m \cdot n}, h_c^2 = m \cdot n$$

Теорема. Катет равен среднему пропорциональному между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.

$$a^2 = c \cdot m, b^2 = c \cdot n$$

Теорема. Напротив угла в 30° лежит катет равный половине гипотенузы.

Соотношение между сторонами и углами прямоугольного треугольника

sin - отношение между противолежащим катетом и гипотенузой;

cos - отношение между прилежащим катетом и гипотенузой;

tg - отношение между противолежащим и прилежащим катетами;

ctg - отношение между прилежащим и противолежащим катетами.

Теорема Пифагора. Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

где a,b - катеты, c - гипотенуза.

Теорема. Центр описанной вокруг прямоугольного треугольника окружности лежит на середине гипотенузы.

$$R = \frac{a}{2}, a - \text{гипотенуза}$$

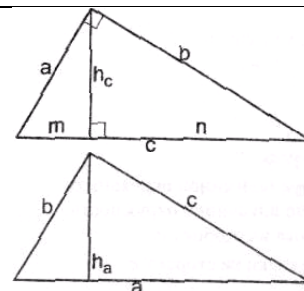
Теорема. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен

$$r = \frac{b + c - a}{2}, a - \text{гипотенуза}, b, c - \text{катеты}$$

Теорема. Медиана, проведенная из вершины прямого угла равна половине гипотенузы.

Подобие прямоугольного треугольника

Теорема. Прямоугольные треугольники подобны, если у них по равному острому углу.



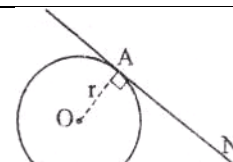
Волшебные стороны

| Катет | Катет | Гипотенуза |
|-------|-------|------------|
| 3 | 4 | 5 |
| 5 | 12 | 13 |
| 6 | 8 | 10 |
| 10 | 24 | 26 |

Окружность

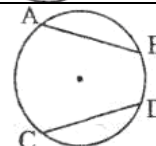
Теорема. Прямая, проходящая через точку окружности, тогда и только тогда касается окружности, когда она перпендикулярна к радиусу, проведенному в эту точку.

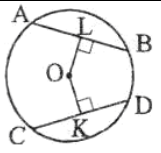
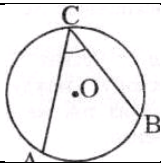
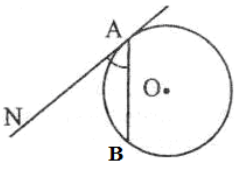
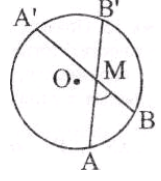
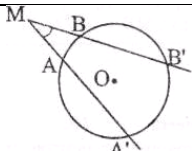
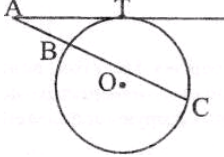
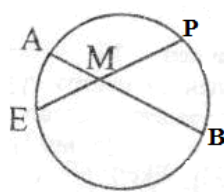
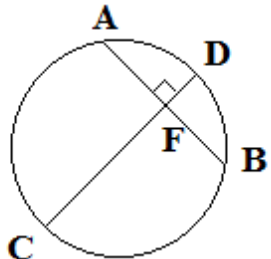
$$OA \perp AN \Rightarrow AN - \text{касательная.}$$



Теорема. Равные хорды стягивают равные дуги и обратно.

$$AB = CD \Leftrightarrow \cup AB = \cup CD$$



| | |
|---|--|
| <p>Теорема. Хорды, равноотстоящие от центра, равны, и наоборот. $OL = OK \Leftrightarrow AB = CD$</p> |  |
| <p>Теорема. Угол, вписанный в окружность, измеряется половиной дуги, на которую он опирается. $\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AB$ <i>Следствие.</i> Угол, опирающийся на диаметр - прямой.</p> |  |
| <p>Теорема. Угол между касательной и секущей, проходящей через точку касания, измеряется половиной дуги окружности, лежащей внутри измеряемого угла. $\angle BAN = \frac{1}{2} \cup AB$</p> |  |
| <p>Теорема. Угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой дуги AB и A'B', лежащих соответственно внутри данного угла и угла с ним вертикального. $\angle AMB = \frac{1}{2} \cdot (\cup AB + \cup A'B')$ В частности, если т. М совпадает с т.О, то $\angle AMB = \cup AB$</p> |  |
| <p>Теорема. Угол, образованный двумя секущими, проведенными из внешней точки, измеряется полуразностью дуг A'B' и AB, лежащих внутри его. $\angle AMB = \frac{1}{2} \cdot (\cup A'B' - \cup AB)$</p> |  |
| <p>Теорема. Произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной или касательная равна среднему геометрическому между секущей, проведенной из той же точки, и ее внешней частью. <i>Следствие.</i> Для любой секущей, проведенной через данную точку A, произведение ее длины на внешнюю часть постоянно: $AC \cdot AB = C(const)$.</p> |  $AT^2 = AC \cdot AB$ $AT = \sqrt{AC \cdot AB}$ |
| <p>Теорема. Две касательные к окружности, проведенные из одной точки, равны между собой: $AN=AT$</p> |  |
| <p>Теорема. Если через точку (т. М, см. рис.), взятую внутри круга, проведено сколько угодно хорд (AB, AP, ...), то произведение отрезков каждой хорды есть число постоянное для всех хорд. $AM \cdot MB = EM \cdot MP = \dots = const$</p> |  |
| <p>Теорема. Радиус (диаметр) CD, перпендикулярный хорде AB, делит хорду пополам. $CD \perp AB \Rightarrow AF = FB$</p> |  |

Теорема. При любом способе касания точка касания и центры окружностей лежат на одной прямой.

Теорема. При внешнем касании центры окружностей расположены на линии центров по разные стороны от точки касания, при внутреннем – по одну сторону.

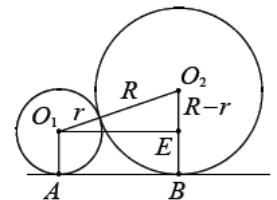
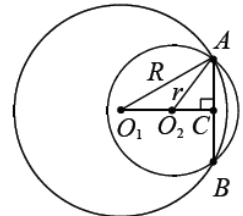
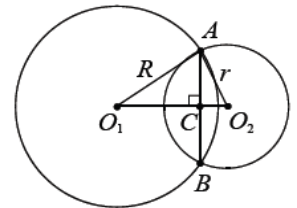
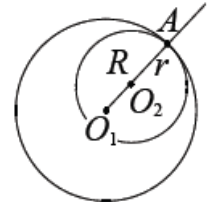
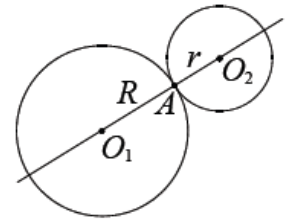
Теорема. Расстояние между центрами касающихся окружностей радиусов R и r

$(r \leq R)$ равно $R + r$ при внешнем касании и $R - r$ при внутреннем.

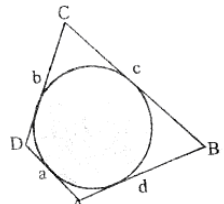
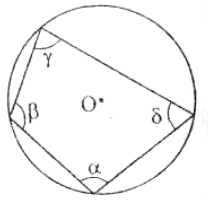
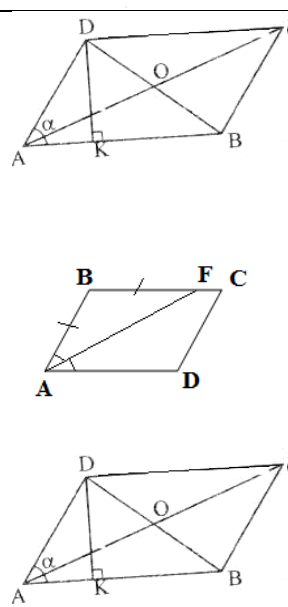
Теорема. Пересекающиеся окружности в точках A и B имеют общую хорду AB .

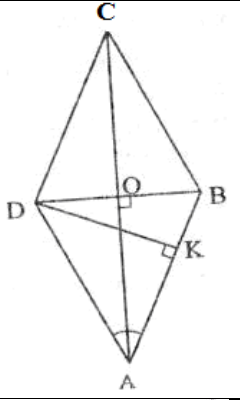
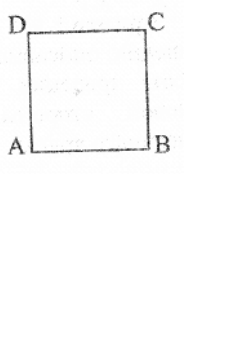

Теорема. Общая хорда перпендикулярна линии центров и делится ею пополам.

Теорема. Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен $2\sqrt{Rr}$.



Многоугольники

| | |
|--|---|
| <p>Теорема. Сумма внутренних углов выпуклого n - угольника равна $180^\circ \cdot (n - 2)$.</p> | |
| <p>Правильный многоугольник</p> | |
| <p>Теорема. Каждый угол правильного n – угольника равен $\alpha_n = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$.</p> | |
| <p>Теорема. Окружность, вписанная в правильный n – угольник, касается всех сторон n – угольника в их серединах.</p> | |
| <p>Теорема. Центр окружности, описанной около правильного n – угольника совпадает с центром окружности, вписанной в тот же n – угольник.</p> | |
| <p>Теорема. Длина стороны правильного n – угольника, вписанного в окружность радиуса R равна $a = 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$.</p> | |
| <p>Теорема. Длина стороны правильного n – угольника, описанного около окружности радиуса r равна $a = 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$.</p> | |
| <p>Четырехугольники</p> | |
| <p>Диагонали $AC=d_1, OB=d_2, O_1O_2 = m$ (m, O_1 и O_2 — середины диагоналей), то справедливы :</p> | |
| <p>Теорема. Для всякого выпуклого четырехугольника</p> $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4 \cdot m^2$ | |
| <p>Теорема. В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда когда, $a+c=b+d$</p> |  |
| <p>Теорема. Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда $\alpha + \gamma = \beta + \delta$</p> |  |
| <p>Параллелограмм</p> | |
| <p>Теорема. Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.</p> | |
| <p>Теорема. У параллелограмма противоположные стороны равны, противоположные углы равны.</p> | |
| <p>Теорема. Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.</p> $\angle BAF = \angle FAD \Rightarrow AB = BF$ | |
| <p>Теорема. Диагональ параллелограмма разбивает его на два равновеликих треугольника.</p> $S_{ADC} = S_{ACB}$ $S_{ADB} = S_{BDC}$ | |
| <p>Формулы:</p> $S = DK \cdot AB = AD \cdot AB \cdot \sin \alpha$ $AC^2 + BD^2 = 2 \cdot (AB^2 + AD^2)$ | |
|  | |

| | |
|--|---|
| <p style="text-align: center;">Ромб</p> <p>Определение. Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны. Теорема. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.</p> <p>Формулы:</p> $AC^2 + BD^2 = 4 \cdot AD^2 \quad S = AD^2 \cdot \sin \angle A = AD \cdot DK = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AC$ <p>Заметим, что ромб – параллелограмм, поэтому свойства параллелограмма сохраняются.</p> |  |
| <p style="text-align: center;">Прямоугольник</p> <p>Определение. Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые. Теорема. Диагонали прямоугольника равны.</p> <p>Формулы:</p> $S = AB \cdot AD$ <p>Посмотри!!! Прямоугольник – это параллелограмм, поэтому свойства параллелограмма сохраняются.</p> |  |
| <p style="text-align: center;">Квадрат</p> <p>Определение. Квадрат – частный случай прямоугольника. Свойства квадрата:</p> <ul style="list-style-type: none"> • все стороны равны; • все углы прямые; • диагонали равны и пересекаются под прямым углом и являются биссектрисами его углов. <p>Формулы: $S = AB^2 = \frac{1}{2} \cdot AC^2$</p> |  |
| <p style="text-align: center;">Трапеция</p> <p>Определение. Трапецией называется четырехугольник, у которого только две противоположные стороны параллельны. где MN — средняя линия трапеции;</p> <p>Определение. Если у трапеции боковые стороны равны, то такая трапеция называется <i>равнобокой (равнобедренной)</i>. Теорема. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.</p> $MN = \frac{AB + DC}{2}$ <p>Теорема. Середина диагоналей трапеции параллельна основаниям и равна их полуразности.</p> $XY = \frac{AB - DC}{2}$ <p>Теорема. Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на большее основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали – полусумме оснований (средней линии).</p> $AK = \frac{AB - DC}{2}$ $BK = \frac{AB - DC}{2}$ |  |

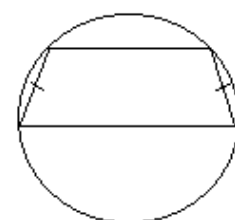
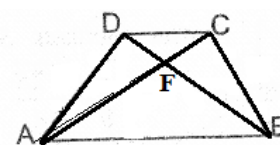
Теорема. Трапеция разбивается диагоналями на два равновеликих треугольника (примыкающих к боковым сторонам $S_{ADF} = S_{BFC}$) и два подобных треугольника (примыкающих к основаниям $\triangle AFB$ и $\triangle DFC$).

Теорема. Трапеция вписана в некоторую окружность тогда и только тогда, когда она является равнобедренной.

Теорема. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам трапеции.

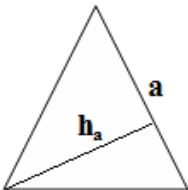
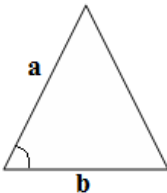
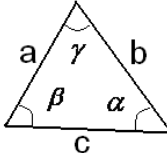
Формулы:

$$S = \frac{1}{2} \cdot DK \cdot (AB + DC) = MN \cdot DK$$

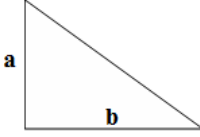


Площади фигур

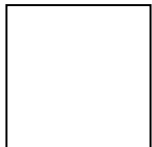
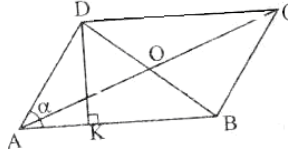
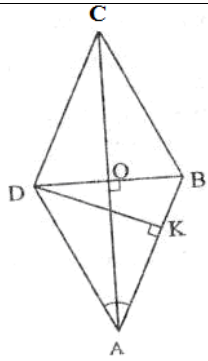
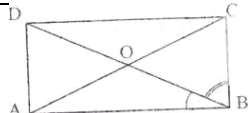
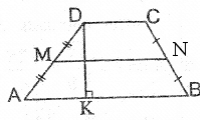
Треугольники

| | | |
|--|---|---|
| Площадь треугольника равна половине произведения его сторон на проведенную к ней высоту. | $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$ |  |
| Площадь треугольника равна половине произведения двух любых его сторон на синус угла между ними. | $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$ |  |
| Формула Герона $S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$ | |  |
| $S = r \cdot p = \frac{r}{2} \cdot (a + b + c)$ | $a + b + c = 2p$ — периметр, $\frac{a + b + c}{2} = p$ — полупериметр. | |

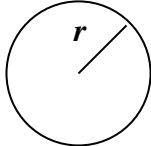
пифагорчик.рф

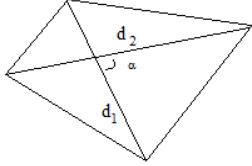
| | | |
|---|------------------------------------|---|
| Площадь треугольника равна произведению трех его сторон, деленному на учетверенный радиус описанной окружности. | $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$ | |
| Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов. | $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ |  |

Четырехугольники

| | | |
|--|---|---|
| Четырехугольник | $S = \sqrt{(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c) \cdot (p-d)},$ где p - полупериметр | |
| Квадрат | $S = a^2$ |  |
| Параллелограмм | $S = DK \cdot AB$ $S = AD \cdot AB \cdot \sin \alpha$ |  |
| Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны. | $S = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AC$ |  |
| Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые. | $S = AB \cdot AD$ |  |
| Трапецией называется четырехугольник, у которого только две противоположные стороны параллельны. где MN — средняя линия трапеции. | $S = \frac{1}{2} \cdot BK \cdot (AD + BC)$ $S = MN \cdot BK$ |  |
| Площадь выпуклого четырехугольника | $S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha,$ где α - угол между d_1 и d_2 | |

Круг и круговой сектор

| | | |
|------|---------------|---|
| Круг | $S = \pi r^2$ |  |
|------|---------------|---|

| | | |
|-----------------|--|---|
| Круговой сектор | $S = \frac{\pi r^2}{360^\circ} \cdot \alpha$ |  |
|-----------------|--|---|