Занятие 2. Четырехугольники

Теоретический блок

Теорема. Сумма внутренних углов выпуклого n - угольника равна $180° \cdot (n-2)$.

Правильный многоугольник

Теорема. Каждый угол правильного n – угольника равен $\alpha_n = \frac{180°(n-2)}{n}$.

Теорема. Окружность, вписанная в правильный n – угольник, касается всех сторон n – угольника в их серединах.

Теорема. Центр окружности, описанной около правильного n – угольника совпадает с центром окружности, вписанной в тот же n – угольник.

Теорема. Длина стороны правильного n – угольника, вписанного в окружность радиуса R равна $a = 2R \cdot sin\frac{180°}{n}$.

Теорема. Длина стороны правильного n – угольника, описанного около окружности радиуса r равна $a = 2r \cdot tg\frac{180°}{n}$.

Четырехугольники

Диагонали $AC=d_1$, $OB=d_2$,, $O_1O_2=m$ (т.O_1 и O_2 — середины диагоналей)

Теорема. Для всякого выпуклого четырехугольника

$a^2+b^2+c^2+d^2=d_1^2+d_2^2+4\cdot m^2$

Теорема. В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда когда, a+c=b+d

Теорема. Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда $\alpha+\gamma=\beta+\delta$

Параллелограмм

Теорема. Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Теорема. У параллелограмма противолежащие стороны равны, противолежащие углы равны.

Теорема. Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.

$\angle BAF = \angle FAD \Rightarrow AB = BF$

Теорема. Диагональ параллелограмма разбивает его на два равновеликих треугольника.

$S_{ADC} = S_{ACB}$

$S_{ADB} = S_{BDC}$

Формулы:

$S = DK \cdot AB = AD \cdot AB \cdot \sin\alpha$ **;** $AC^2 + BD^2 = 2\cdot(AB^2 + AD^2)$

Ромб

Определение. Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны.

Теорема. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

Формулы:

$AC^2 + BD^2 = 4\cdot AD^2$ $S = AD^2 \cdot \sin\angle A = AD \cdot DK = \frac{1}{2}\cdot BD \cdot AC$

Заметим, что ромб – параллелограмм, поэтому свойства параллелограмма сохраняются.

Прямоугольник

Определение. Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые.

Теорема. Диагонали прямоугольника равны.

Формулы:

$S = AB \cdot AD$

Посмотри!!! Прямоугольник - это параллелограмм, поэтому свойства параллелограмма сохраняются.

Квадрат

Определение. Квадрат - частный случай прямоугольника.

Свойства квадрата:

- все стороны равны;
- все углы прямые;
- диагонали равны и пересекаются под прямым углом и являются биссектрисами его углов.

__**Формулы:**__ $S = AB^2 = \frac{1}{2} \cdot AC^2$

$d = a\sqrt{2}$

Трапеция

Определение. Трапецией называется четырехугольник, у которого только две противолежащие стороны параллельны.

где MN — *средняя линия* трапеции;

Определение. Если у трапеции боковые стороны равны, то такая трапеция называется *равнобочной (равнобедренной).*

Теорема. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

$$MN = \frac{AB + DC}{2}$$

Теорема. Середина диагоналей трапеции параллельна основаниям и равна их полуразности.

$$XY = \frac{AB - DC}{2}$$

Теорема. Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на большее основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали – полусумме оснований (средней линии).

$AK = \frac{AB - DC}{2}$

$BK = \frac{AB - DC}{2}$

Теорема. Трапеция разбивается диагоналями на два равновеликих треугольника (примыкающих к боковым сторонам $S_{ADF} = S_{BFC}$) и два подобных треугольника (примыкающих к основаниям $\Delta AFB \text{ и } \Delta DFC$).

Теорема. Трапеция вписана в некоторую окружность тогда и только тогда, когда она является равнобедренной.

__**Формулы:**__

$S = \frac{1}{2} \cdot DK \cdot \left(AB + DC\right) = MN \cdot DK$