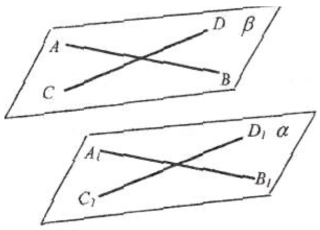
СТЕРЕОМЕТРИЯ. ОСНОВНАЯ ТЕОРИЯ

Параллельность плоскостей

Определение. Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

Теорема (признак параллельности двух плоскостей). Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

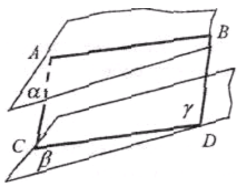


$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel A_1B_1 \\ CD \parallel C_1D_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$$

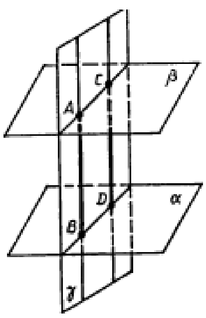
Свойства параллельных плоскостей.

1°. Если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то линии пересечения параллельны.

$$\alpha \parallel \beta \Rightarrow AB \parallel CD$$



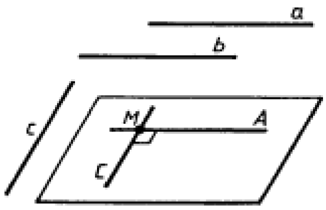
2°. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.



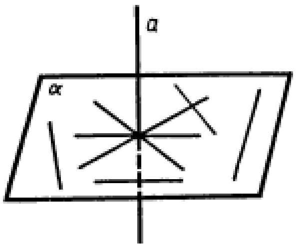
Перпендикулярность прямых и плоскостей

Перпендикулярные прямые в пространстве

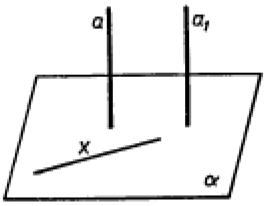
Лемма. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна в этой прямой.



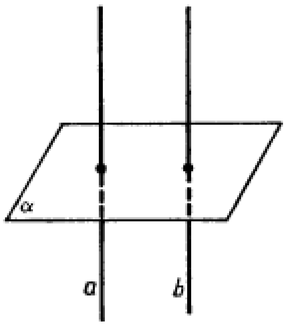
Определение. Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.



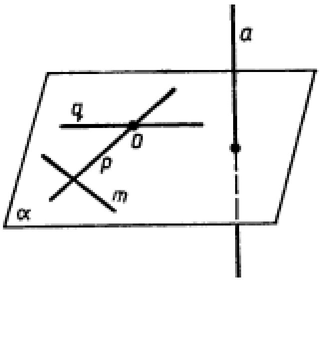
Теорема. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.



Теорема. Если две параллельные прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны.

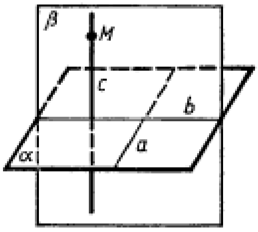


Теорема (признак перпендикулярности прямой и плоскости). Если прямая перпендикулярна к двум непересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.



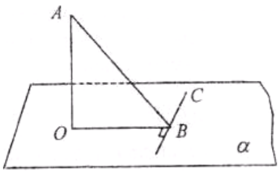
$$\left.\begin{matrix} OK \perp AB \\ OK \perp CD \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow OK \perp \alpha$$

Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости. Через любую точку пространвтсва проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.



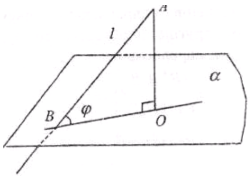
Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью.

Теорема о трех перпендикулярах. Для того, чтобы прямая, лежащая в плоскости, была перпендикулярная наклонной, необходимо и достаточно, чтобы эта прямая была перпендикулярна проекции наклонной.



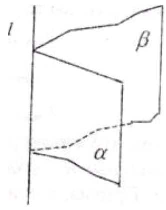
$$\begin{cases} OB - \textit{проекция } AB \textit{ на } \alpha \\ OB \perp BC \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow AB \perp BC$$

Определение. Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.



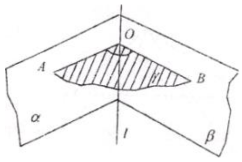
$$\angle ABO = \varphi = (l, \alpha)$$

Определение. *Двугранным углом* называется фигура, образованная двумя полуплоскостями, имеющими общую граничную прямую.



Полуплоскости называются гранями, а их общая прямая - ребром двугранного угла.

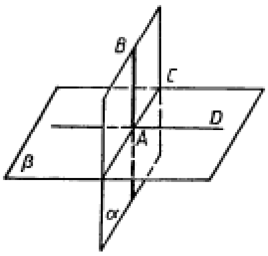
α, β - полуплоскости, l - прямая.



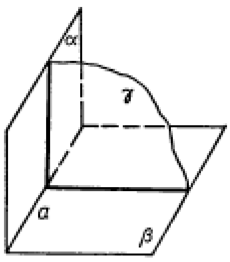
Определение. $\angle\alpha\, l\beta$ -двугранный угол, $\gamma \perp l \Rightarrow \angle AOB$ - линейный угол двугранного угла $\angle\alpha\, l\beta$

Определение. Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

Теорема (признак перпендикулярности двух плоскостей). Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.



Следствие. Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.



Параллелепипед

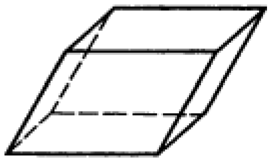
Призма, в основании которой лежит параллелограмм, называется *параллелепипедом.*

Свойства параллелепипеда:

- противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны;
- диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Параллелепипед

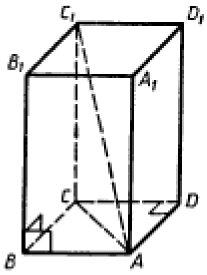
Многогранник, в основании которой лежит параллелограмм, называется *параллелепипедом.*



Свойства параллелепипеда:

- противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны;
- диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Прямоугольный параллелепипед



Свойства прямоугольного параллелепипеда:

- гранями являются прямоугольники (6 граней);
- все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда – прямые.

Теорема. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

$$AC_1{}^2 = AB^2 + AD^2 + DD_1{}^2$$

Теорема. Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

<u>Формулы:</u>

$V = a \cdot b \cdot c = S \cdot h,$

$S = ab - \textit{площадь основания}$

$h - \textit{высота}$

$S_{\textit{полной}} = 2(ab + bc + ac)$

Куб

Определение. Куб – прямоугольный параллелепипед с равными ребрами.

<u>Формулы:</u>

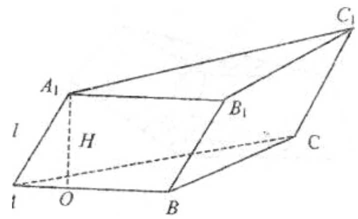
$V = a^3$

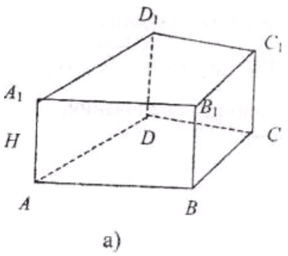
$S = 6a^2 - \textit{площадь поверхности}$

$d = \sqrt{3}a$

Призма

Различают *призмы прямые* (рис.а) и *наклонные* (рис.б) (по углу наклона бокового ребра к плоскости основания).





$$S_{бок.поверх.} = P_{\perp} \cdot l_{бок.ребра}$$

$$l - длина\ бокового\ ребра$$

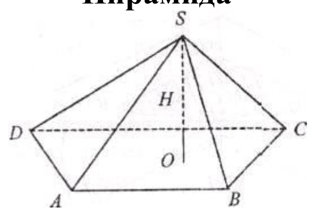
$$P_{\perp} - периметр \perp -ого\ ему\ сечения$$

$$S_{полной} = S_{бок.поверх.} + 2 \cdot S_{основ.}$$

Прямая призма, основанием которой является правильный многоугольник, называется *правильной призмой*.

Заметим, что многогранник называется *правильным*, если все его грани - равные правильные n- угольники и из каждой вершины выходит одно и то же число ребер.

Пирамида



S_{Δ} - площади боковых треугольных граней пирамиды.

Теорема. Если все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью ее основания равные углы (все боковые ребра пирамиды равны), то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания.

Теорема. Если все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом φ, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в основание.

$$S_{бок.поверх.} = \frac{S_{основания}}{\cos\varphi}$$

Теорема. Если боковая грань пирамиды перпендикулярна плоскости основания пирамиды, то высота пирамиды совпадает с высотой этой грани проведенной к стороне основания пирамиды.

Теорема. Если две грани пирамиды перпендикулярны основанию пирамиды, то высота пирамиды принадлежит прямой, по которой пересекаются плоскости этих граней.

<u>Формулы:</u>

$S_{пирамиды} = S_{основ.} + S_{бок.поверх.}$

Правильная пирамида

Пирамида считается *правильной*, если основание ее – правильный многоугольник, а вершина проектируется в центр этого многоугольника.

Формулы:

$$S_{бок.поверх.} = \frac{1}{2} \cdot P_{основ.} \cdot h_{бок.}$$

$P_{основ.}$ - периметр основания,

$h_{бок.}$ - апофема пирамиды;

Тетраэдр

$$S_{полной.} = a^2\sqrt{3}$$

$$a - сторона$$

Правильная усеченная пирамида

Теорема. Если в пирамиде проведено сечение, параллельное основанию, то площади оснований обеих пирамид (т.е. площади оснований усеченной пирамиды) относятся, как квадраты соответствующих высот.

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{(O_1S)^2}{(OS)^2} = \frac{h_2^2}{h_1^2}$$

Существует пять правильных многогранников: тетраэдр (4 треугольника, 6 ребер, 4 вершины), куб (6 квадратов, 12 ребер, 8 вершин), октаэдр (8 треугольников, 12 ребер, 6 вершин), додекаэдр (12 пятиугольников, 30 ребер, 20 вершин), икосаэдр (20 треугольников, 30 ребер, 12 вершин).

Формулы:

$$S_{бок.поверх.} = (P + p) \cdot \frac{h_{бок.}}{2}$$

$$S_{бок.поверх.} = \frac{S_1 - S_2}{\cos\alpha}$$

$$S_{полн.} = S_{бок.} + S_1 + S_2$$

S_1 и S_2 – площадь верхнего и нижнего основания

α –мера двугранного угла при ребре нижнего основания

P - периметр нижнего основания,

p - периметр верхнего основания,

$h_{бок.}$ *- апофема боковой грани.*