

$$\frac{2x^2 - 5x}{x - 3} \leq x.$$

1. Решите неравенство:

Решение.

Имеем:

$$\frac{2x^2 - 5x}{x - 3} \leq x \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x}{x - 3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x - 2)}{x - 3} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [2; 3)$.

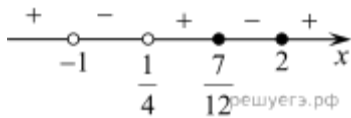
$$\frac{12x^2 - 31x + 14}{4x^2 + 3x - 1} \leq 0.$$

2. Решите неравенство:

Решение.

Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{12x^2 - 31x + 14}{4x^2 + 3x - 1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 2)(12x - 7)}{(x + 1)(4x - 1)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < \frac{1}{4}, \\ \frac{7}{12} \leq x \leq 2. \end{cases}$$



Ответ: $\left(-1; \frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{7}{12}; 2\right]$.

$$\frac{(x - 2)(x - 4)(x - 7)}{(x + 2)(x + 4)(x + 7)} > 1.$$

3. Решите неравенство:

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде

$$\begin{aligned} & \frac{x^3 - 13x^2 + 50x - 56}{(x + 2)(x + 4)(x + 7)} - 1 > 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{x^3 - 13x^2 + 50x - 56 - (x^3 + 13x^2 + 50x + 56)}{(x + 2)(x + 4)(x + 7)} > 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{-26x^2 - 112}{(x + 2)(x + 4)(x + 7)} > 0 \Leftrightarrow \frac{13x^2 + 56}{(x + 2)(x + 4)(x + 7)} < 0, \end{aligned}$$

следовательно, $x < -7$ или $-4 < x < -2$.

Ответ: $(-\infty; -7); (-4; -2)$.

$$x^3 - x^2 - \frac{18x^2 - x + 4}{x - 4} \leq 1.$$

4. Решите неравенство

Решение.

Решим неравенство методом интервалов:

$$\begin{aligned} & \frac{(x^3 - x^2)(x - 4) - 18x^2 + x - 4}{x - 4} \leq 1 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{x^4 - x^3 - 4x^3 + 4x^2 - 18x^2 + x - 4 - x + 4}{x - 4} \leq 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{x^4 - 5x^3 - 14x^2}{x - 4} \leq 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{x^2(x - 7)(x + 2)}{x - 4} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2, \\ x = 0, \\ 4 < x \leq 7. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $(-\infty; -2]; \{0\}; (4; 7]$.

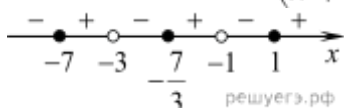
$$x + 3 - \frac{16}{x + 3} \geq \frac{14 - 12x - 2x^2}{x + 1}.$$

5. Решите неравенство

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\begin{aligned} & \frac{(x + 3)^2 - 16}{x + 3} \geq \frac{-2(x - 1)(x + 7)}{x + 1} \Leftrightarrow \frac{(x - 1)(x + 7)}{x + 3} + \frac{2(x - 1)(x + 7)}{x + 1} \geq 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{(x - 1)(x + 7)(x + 1 + 2(x + 3))}{(x + 3)(x + 1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 1)(x + 7)(3x + 7)}{(x + 1)(x + 3)} \geq 0. \end{aligned}$$



Решая полученное неравенство методом интервалов (см. рис.), находим ответ:

$$-7 \leq x < -3; -\frac{7}{3} \leq x < -1; x \geq 1.$$

Ответ: $[-7; -3) \cup \left[-\frac{7}{3}; -1\right) \cup [1; +\infty)$.

$$\frac{(5x - 3)^2}{x - 2} \geq \frac{9 - 30x + 25x^2}{14 - 9x + x^2}.$$

6. Решите неравенство

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\begin{aligned} & \frac{(5x - 3)^2}{x - 2} \geq \frac{9 - 30x + 25x^2}{14 - 9x + x^2} \Leftrightarrow \frac{(5x - 3)^2}{x - 2} - \frac{(5x - 3)^2}{(x - 2)(x - 7)} \geq 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{(5x - 3)^2(x - 8)}{(x - 2)(x - 7)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, 6, \\ 2 < x < 7, \\ x \geq 8. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\{0, 6\} \cup (2; 7) \cup [8; +\infty)$.

$$\frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 2x} + \frac{7x - 19}{x - 3} \leq \frac{8x + 1}{x}.$$

7. Решите неравенство:

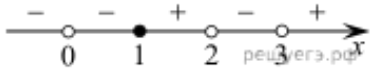
Решение.

Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 2x} + \frac{7x - 19}{x - 3} \leq \frac{8x + 1}{x} \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x^2 - 2x} + 7 + \frac{2}{x - 3} - 8 - \frac{1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{x^2 - 2x} + \frac{2}{x - 3} - \frac{1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{x(x-2)} + \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{x(x-3)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ 0 < x \leq 1, \\ 2 < x < 3. \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; 1] \cup (2; 3)$.

$$\frac{x^5 - x^2}{x^2} \geq \frac{x^3 - 1}{4x^2}.$$

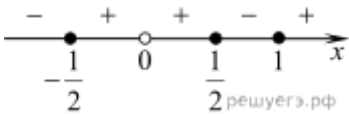
8. Решите неравенство:

Решение.

Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{x^5 - x^2}{x^2} \geq \frac{x^3 - 1}{4x^2} \Leftrightarrow \frac{(x^3 - 1)(4x^2 - 1)}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(2x-1)(2x+1)}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -0,5 \leq x < 0, \\ 0 < x \leq 0,5, \\ x \geq 1. \end{cases}$$



Ответ: $[-0,5; 0) \cup (0; 0,5] \cup [1; +\infty)$.

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} + \frac{3x + 1}{x - 1} \leq \frac{4x + 1}{x}.$$

9. Решите неравенство:

Решение.

Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} + \frac{3x + 1}{x - 1} \leq \frac{4x + 1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x^2 + 2x} + 3 + \frac{4}{x - 1} - 4 - \frac{1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^2 + 2x} + \frac{4}{x - 1} - \frac{1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x}{x(x+2)} + \frac{4}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3x(x+3)}{x(x-1)(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3, \\ -2 < x < 0, \\ 0 < x < 1. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -3] \cup (-2; 0) \cup (0; 1)$.

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2-x} \leq 5.$$

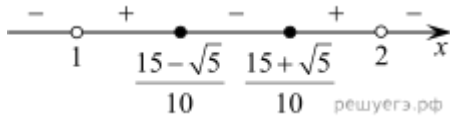
10. Решите неравенство:

Решение.

Используя метод интервалов, получаем:

$$\frac{5x^2 - 15x + 11}{(x-1)(2-x)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5 \left(x - \frac{15-\sqrt{5}}{10} \right) \left(x - \frac{15+\sqrt{5}}{10} \right)}{(x-1)(2-x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ \frac{15-\sqrt{5}}{10} \leq x \leq \frac{15+\sqrt{5}}{10}, \\ x > 2. \end{cases}$$



$$(-\infty; 1) \cup \left[\frac{15-\sqrt{5}}{10}; \frac{15+\sqrt{5}}{10} \right] \cup (2; +\infty).$$

Ответ:

1. Решите неравенство: $\frac{2x^2 - 5x}{x - 3} \leq x.$
2. Решите неравенство: $\frac{12x^2 - 31x + 14}{4x^2 + 3x - 1} \leq 0.$
3. Решите неравенство: $\frac{(x - 2)(x - 4)(x - 7)}{(x + 2)(x + 4)(x + 7)} > 1.$
4. Решите неравенство: $x^3 - x^2 - \frac{18x^2 - x + 4}{x - 4} \leq 1.$
5. Решите неравенство: $x + 3 - \frac{16}{x + 3} \geq \frac{14 - 12x - 2x^2}{x + 1}.$
6. Решите неравенство: $\frac{(5x - 3)^2}{x - 2} \geq \frac{9 - 30x + 25x^2}{14 - 9x + x^2}.$
7. Решите неравенство: $\frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 2x} + \frac{7x - 19}{x - 3} \leq \frac{8x + 1}{x}.$
8. Решите неравенство: $\frac{x^5 - x^2}{x^2} \geq \frac{x^3 - 1}{4x^2}.$
9. Решите неравенство: $\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} + \frac{3x + 1}{x - 1} \leq \frac{4x + 1}{x}.$
10. Решите неравенство: $\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{2 - x} \leq 5.$