

Прототип 3 задания ЕГЭ. Стереометрия

Основные определения

Аксиомы стереометрии

Теорема. Через любые три точки, не лежащих на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

Теорема. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

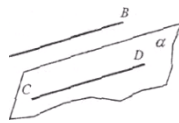
Теорема. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Параллельность прямых и плоскостей

Лемма о параллельности трех прямых. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то другая прямая пересекает эту плоскость.

Теорема. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

Теорема. Если прямая параллельна какой-нибудь прямой, расположенной на плоскости, то она параллельна этой плоскости.

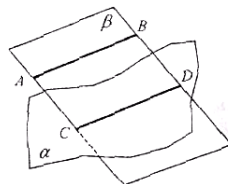


$$AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel \text{плоскости } \alpha$$

Теорема. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, то линия пересечения параллельна первой прямой.

β - пересекающая плоскость

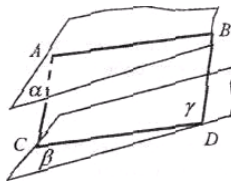
$$AB \parallel \text{плоскости } \alpha \Rightarrow AB \parallel CD$$



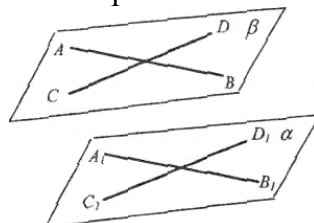
Теорема. Если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то линии пересечения параллельны.

γ - пересекающая плоскость

$$\alpha \parallel \beta \Rightarrow AB \parallel CD$$



Теорема. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.



$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel A_1B_1 \\ CD \parallel C_1D_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$$

Определение. Две прямые называются скрещивающимися, если не лежат в одной плоскости.

Признак скрещивающихся прямых

Теорема. Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.

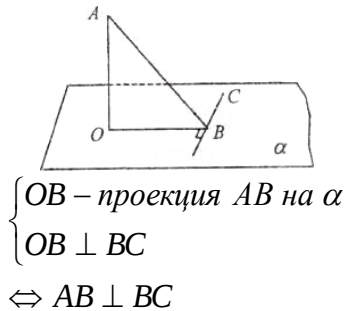
Теорема. Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

Перпендикулярность прямых и плоскостей

Теорема. Для того, чтобы прямая была перпендикулярна плоскости, необходимо и достаточно, чтобы она была перпендикулярна к двум произвольным непараллельным прямым, лежащим в этой плоскости.

$$\left. \begin{array}{l} OK \perp AB \\ OK \perp CD \end{array} \right\} \Leftrightarrow OK \perp \alpha$$

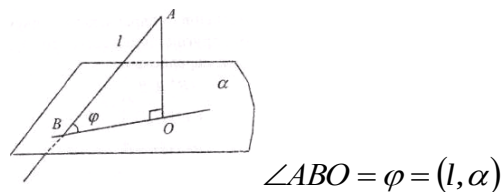
Теорема о трех перпендикулярах. Для того, чтобы прямая, лежащая в плоскости, была перпендикулярна наклонной, необходимо и достаточно, чтобы эта прямая была перпендикулярна проекции наклонной.



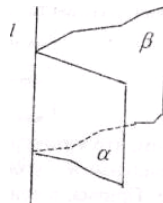
Теорема. Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они параллельны между собой.

Теорема. Если две плоскости перпендикулярны к одной прямой, то они параллельны между собой.

Определение. Углом между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и ее проекцией на плоскость.

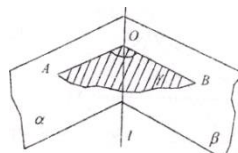


Определение. Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями, имеющими общую граничную прямую.



Полуплоскости называются гранями, а их общая прямая - ребром двугранного угла.

α, β - полуплоскости, l - прямая.



Определение. Пересечение и плоскости, к его ребру, углом двугранного угла перпендикулярной l называется линейным двугранного угла.

$\angle \alpha l \beta$ - двугранный угол,

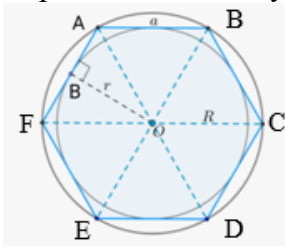
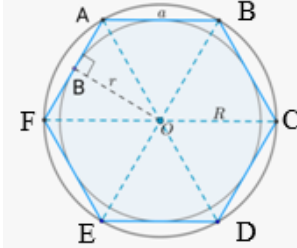
$\gamma \perp l \Rightarrow \angle AOB$ - линейный угол двугранного угла $\angle \alpha l \beta$

Определение. Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

Многогранники

Определение. Многогранником называется тело, ограниченное плоскими многоугольниками.

Общие формулы

Куб, прямоугольный параллелепипед, призма, цилиндр	Пирамида, конус	Шар, сфера
Общая формула: $V = S_{\text{осн}} \cdot h$	Общая формула: $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$	Шар: $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi r^3$, Сфера: $S_{\text{поверхности сферы}} = 4\pi r^2$ Площадь сечения: $S_{\text{круга}} = \pi r^2$
Куб: $V = a^3$, $d_{\text{куб}} = a\sqrt{3}$, $d_{\text{квадрат}} = a\sqrt{2}$	Конус: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$, $l^2 = r^2 + h^2$ $S_{\text{осевого сечения}} = 2rh$ $\frac{S_6}{S_m} = k^2$ $\frac{V_6}{V_m} = k^3$	
Прямоугольный параллелепипед: $V = abc$ $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ $S = 2(ab + bc + ac)$		
Призма $\frac{S_6}{S_m} = k^2$ $\frac{V_6}{V_m} = k^3$ - правильная треугольная: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $h_{\text{основания}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ - правильная четырехугольная: $S = a^2$ $S = \frac{d^2}{2}$ $d_{\text{квадрат}} = a\sqrt{2}$ - правильная шестиугольная:  $S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, $a = R$ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F = 120^\circ$ $AB \parallel FC \parallel ED$, $BC \parallel AD \parallel EF$, $AF \parallel BE \parallel CD$ $AC = CE = DF = a\sqrt{3}$	Призма - правильная треугольная: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ - правильная четырехугольная: $S = a^2$ - правильная шестиугольная:  $S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, $a = R$ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F = 120^\circ$ $AB \parallel FC \parallel ED$, $BC \parallel AD \parallel EF$, $AF \parallel BE \parallel CD$ $AC = CE = DF = a\sqrt{3}$	

Параллелепипед

Призма, в основании которой лежит параллелограмм, называется *параллелепипедом*.

Свойства параллелепипеда:

- противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны;
- диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Прямоугольный параллелепипед

Свойства прямоугольного параллелепипеда:

- гранями являются прямоугольники;
- все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда – прямые.

Теорема. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Теорема. Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

Формулы:

$$V = a \cdot b \cdot c = S \cdot h,$$

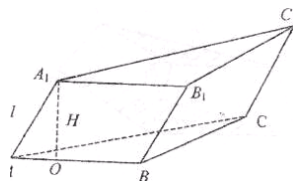
$$S = ab - \text{площадь основания}$$

$$h - \text{высота}$$

$$S_{\text{полной}} = 2(ab + bc + ac)$$

Призма

Различают *призмы прямые* (рис.а) и *наклонные* (рис.б) (по углу наклона бокового ребра к плоскости основания).



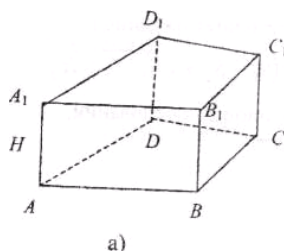
$$S_{\text{бок.поверх}} = P_{\perp} \cdot l_{\text{бок.ребра}}$$

$$l - \text{длина бокового ребра}$$

$$P_{\perp} - \text{периметр } \perp\text{-ого ему сечения}$$

$$S_{\text{полной}} = S_{\text{бок.поверх}} + 2 \cdot S_{\text{основ.}}$$

Прямая призма, основанием которой является правильный многоугольник, называется *правильной призмой*.



$$S_{\text{бок.поверх}} = P_{\text{основ.}} \cdot l_{\text{бок.ребра}} \quad (l = H)$$

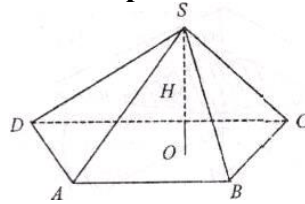
$$V_{\text{призмы}} = S_{\text{основ.}} \cdot H$$

$$V_{\text{прям.призмы}} = S_{\text{основ.}} \cdot l_{\text{бок.ребра}}$$

$$S_{\text{призмы}} = S_{\text{бок.поверх}} + 2 \cdot S_{\text{основ.}}$$

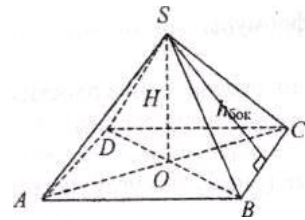
Заметим, что многогранник называется *правильным*, если все его грани - равные правильные многоугольники и из каждой вершины выходит одно и то же число ребер.

Пирамида



Правильная пирамида

Пирамида считается *правильной*, если основание ее – правильный многоугольник, а вершина проектируется в центр этого многоугольника.



Формулы:

$$S_{\text{бок.поверх}} = \frac{1}{2} \cdot P_{\text{основ.}} \cdot h_{\text{бок.}}$$

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{основ.}} \cdot H$$

$P_{\text{основ.}}$ - периметр основания,

$h_{\text{бок.}}$ - апофема пирамиды;

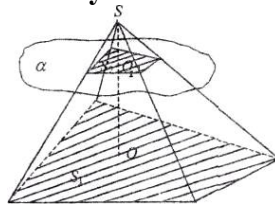
Тетраэдр

$$S_{\text{полной}} = a^2 \sqrt{3}$$

a – сторона

$$V_{\text{тетраэдра}} = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot a^3$$

Правильная усеченная пирамида



Теорема. Если в пирамиде проведено сечение, параллельное основанию, то площади оснований обеих пирамид (т.е. площади оснований усеченной пирамиды) относятся, как квадраты соответствующих высот.

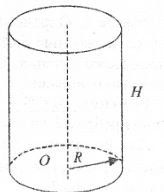
$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{(O_1S)^2}{(OS)^2} = \frac{h_2^2}{h_1^2}$$

Существует пять правильных многогранников: тетраэдр (4 треугольника, 6 ребер, 4 вершины), куб (6 квадратов, 12 ребер, 8 вершин), октаэдр (8 треугольников, 12 ребер, 6 вершин), додекаэдр (12 пятиугольников, 30 ребер, 20 вершин), икосаэдр (20 треугольников, 30 ребер, 12 вершин).

Круглые тела

Определение. Круглые тела - тела, ограниченные поверхностями вращения.

Цилиндр

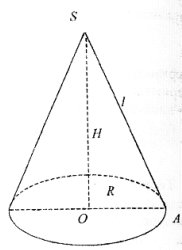


Формулы:

$$S_{\text{бок.поверх}} = 2\pi \cdot R \cdot H, \quad V = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$S_{\text{цилиндра}} = 2\pi R \cdot (R + H)$$

Прямой круговой конус



Формулы:

$$S_{\text{бок.поверхконуса}} = \pi R \cdot l,$$

$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{основ.}} \cdot H,$$

$$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2,$$

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$