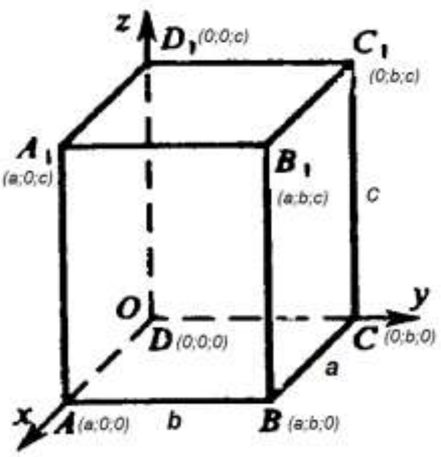
Задание 14. Стереометрия. Координатный и векторный методы

Геометрические фигуры и координаты точек

Куб и прямоугольный параллелепипед

Пусть *BC = a, AB= b, BB₁ = c*



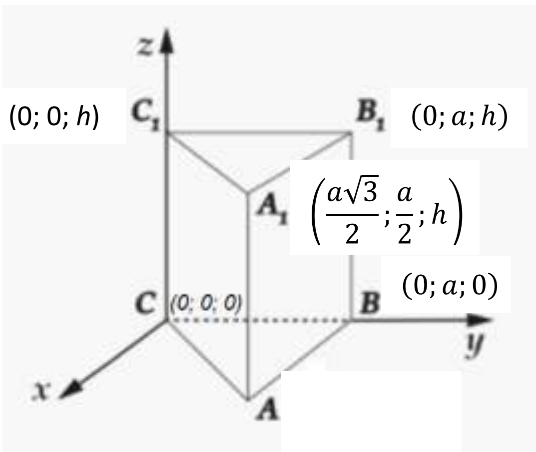
$$\boldsymbol{BD \cap AC = O, O\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};0\right)}$$

Куб – прямоугольный параллелепипед с ребром a.

Правильная четырехугольная призма – прямая призма, основание которой является квадрат.

Правильная треугольная призма

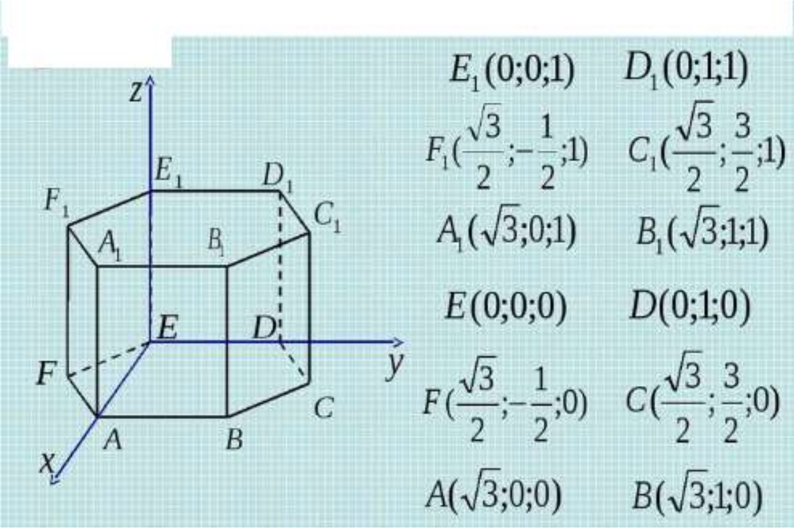
Пусть *AB= a, BB₁ = h*



$\boldsymbol{AM \cap BH = O}$ (центр основания), $O\left(\boldsymbol{\frac{a\sqrt{3}}{6};\frac{a}{2};0}\right)$

Правильной шестиугольной призмы

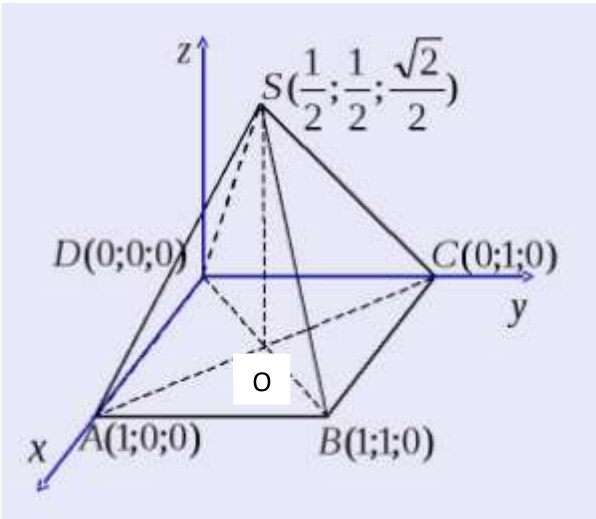
Пусть $AB = 1$, $BB_1 = 1$



Пирамида

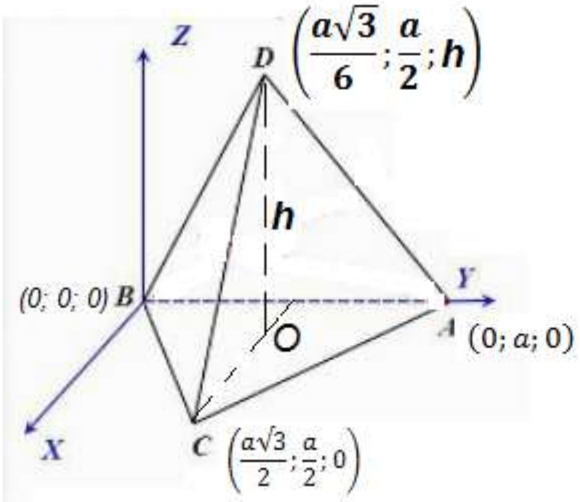
Правильная четырехугольная пирамида

Пусть AB = 1, CS = 1



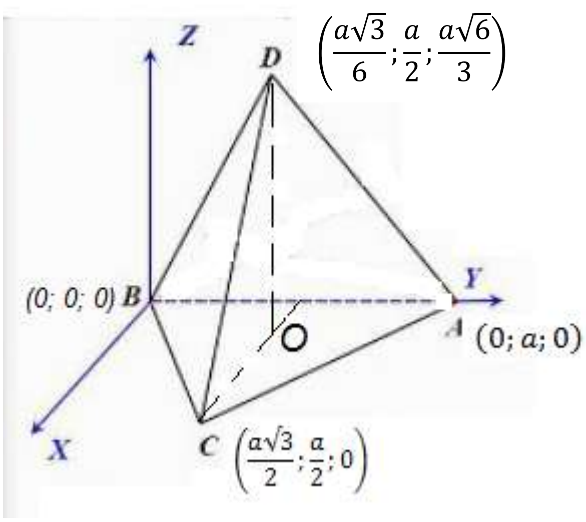
Правильная треугольная пирамида

Пусть AB = *a*, OD = *h*



$$O\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; \frac{a}{2}; 0\right)$$

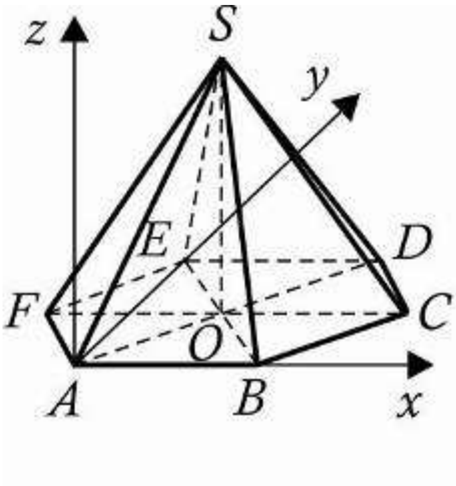
Тетраэдр с ребром *a*

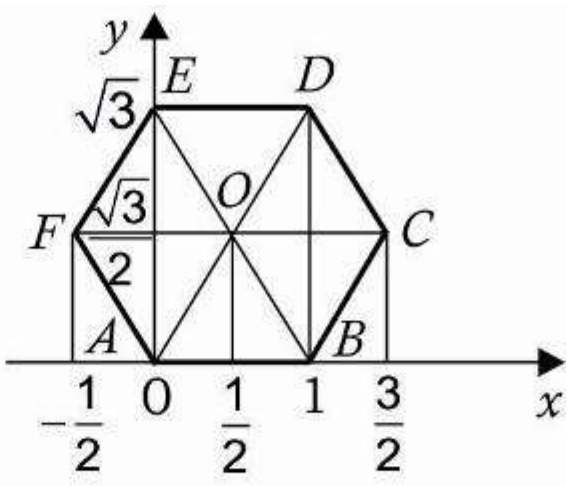


$$O\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; \frac{a}{2}; 0\right)$$

Правильной шестиугольной пирамиды

Пусть AB = a, OS = h





$\boldsymbol{A(0;0;0), B(a;0;0), C\left(\frac{3a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), D\left(a;a\sqrt{3};0\right), E\left(0;a\sqrt{3};0\right), F\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right),}$

$\boldsymbol{O\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), S\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};h\right)}$

1.Нахождение координаты вектора.

Пусть $A(x_1, y_1, z_1),\ B(x_2, y_2, z_2)$ – точки пространства, тогда вектор
$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.

2.Нахождение координаты середины отрезка *AB*.

$C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$ – середина АВ

3.Нахождение длины отрезка *AB*.

$d = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ -расстояние между двумя точками А и В.

4.Скалярное произведение

- Из пункта (1) находим координату вектора по двум точкам.

Пусть $\vec{a} = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} + z_1 \cdot \vec{k} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} + z_2 \cdot \vec{k} = (x_2, y_2, z_2)$

Скалярное произведение:

$$\vec{a} \cdot \vec{в} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{в}\right| \cdot \cos\left(\vec{a}, \vec{в}\right)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{в} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{в} = \vec{в} \cdot \vec{a}$$

Итог скалярного произведения – число

Если $\vec{a} \perp \vec{в}$, *то* $\vec{a} \cdot \vec{в} = 0$, *т.к.* $\cos(\vec{a}, \vec{в}) = 0$

5.Угол между прямыми (векторами).

- Из пункта (1) находим координаты двух векторов по двум точкам.

Пусть даны два вектора (прямые) $\vec{a} = \{a_1; в_1; c_1\}$ *и* $\vec{b} = \{a_2; в_2; c_2\}$. Найти угол $\angle\omega$ между этими векторами.

$$\cos\omega = \frac{a_1 \cdot a_2 + в_1 \cdot в_2 + c_1 \cdot c_2}{\sqrt{a_1^2 + в_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + в_2^2 + c_2^2}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$

$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + в_1^2 + c_1^2}$ – *длина вектора*

6. Составляем уравнение плоскости.

$Ax + By + Cz + D = 0 -$ *уравнение плоскости*

$\vec{a} = \{A; B; C\} -$ *нормальный вектор плоскости*

- Уравнение плоскости $\mathbf{O_{xy}}$ имеет вид: **z=0**
- Уравнение плоскости $\mathbf{O_{xz}}$ имеет вид: **y=0**
- Уравнение плоскости $\mathbf{O_{yz}}$ имеет вид: **x=0**

7.Уравнение плоскости по точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ **и нормальному вектору** $\vec{n} = \{A; B; C\}$**.**

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0$$

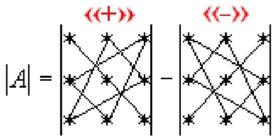
8.Уравнение плоскости по трем точкам $M_1(x_1; y_1; z_1)$ *и* $M_2(x_2; y_2; z_2)$ *и* $M_3(x_3; y_3; z_3)$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Определитель

Правило треугольников (Сарриос)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

9.Уравнение плоскости по одной точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ **и двум векторам, коллинеарным плоскости** $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}, \vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$.

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

10.Уравнение плоскости по двум точкам $M_1(x_1; y_1; z_1)$ *и* $M_2(x_2; y_2; z_2)$ **и коллинеарному вектору** $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

11.Угол ($\angle\varphi$) между двумя плоскостями: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ *и* $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

- Составляем уравнение двух плоскостей, используя пункты (7), (8), (9) или (10).
- Находим нормальные вектора данных плоскостей (это коэффициенты перед x, y,z)

$$\begin{matrix}\vec{n}_1=\{A_1;B_1;C_1\}\\ \vec{n}_2=\{A_2;B_2;C_2\}\end{matrix}\text{-нормальные векторы}$$

$$cos\varphi=\cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})=\frac{|\ A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C\ |_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}$$

$\circ$ *если* $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0,$ *то плоскости перпендикулярны*

$\circ$ *если* $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2},$ *то плоскости параллельны*

12.Нахождение угла между вектором (прямой) и плоскостью

- Составляем вектор прямой, используя пункт (1)
- Составляем уравнение плоскости, использую пункт (7),(8), (9) или (10).
- Угол между прямой $\overrightarrow{AB}=\{m;n;k\}$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$

$$\sin\varphi=\frac{A\cdot m+B\cdot n+C\cdot k}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+k^2}}$$

13.Точка пересечения прямой и плоскости.

- **Составляем уравнение прямой, проходящей через две точки** $M_1(x_1;y_1;z_1)$ *и* $M_2(x_2;y_2;z_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}=t$$

- **Разделяем на три уравнения, выражаем x, y, z через t,перемножив крест на крест.**
- $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=t;\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=t;\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}=t$
- **Составляем уравнение плоскости, используя пункты (7), (8), (9) или (10)**

$Ax+By+Cz+D=0-$ *уравнение плоскости*

- Подставляем x(t), y(t), z(t) в уравнение плоскости и находим t.

- Подставляем найденное t в уравнения x(t), y(t), z(t) и получаем точку пересения прямой с плоскостью.

14.Нахождение прямой пересечения двух плоскостей.

Прямая $\vec{p} - \textit{пересечения двух плоскостей}$**,** $\boldsymbol{\alpha \cap \beta = p}$

$$\alpha : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad и \quad \beta : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}, \vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\} - нормальные \quad вектора \quad плоскости\ \alpha\ и\ \beta$$

$$\vec{p} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot (B_1 \cdot C_2 - B_2 \cdot C_1) + \vec{j} \cdot (C_1 \cdot A_2 - A_1 \cdot C_2) + \vec{k} \cdot (A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1)$$

15. Нахождения расстояния (d) от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ **до плоскости** $Ax + By + Cz + D = 0$.

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

16. Расстояние h от прямой *AB* до прямой *CD*.

- Находим координаты векторов по двум точкам (пункт 1)
- Составляем уравнение плоскости α по двум точкам C и D и коллинеарному вектору AB (пункт 10)
- Находим расстояние от любой из точек (A или B) до плоскости α *пункт* 15.

17.Расстояние между двумя плоскостями $\alpha : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0\ и\ \beta : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

- Расстояние между плоскостями возможно найти, если они будут параллельны, те

$$\circ\ если\ \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, то\ плоскости\ параллельны$$

- Находим расстояние от любой точки плоскости α до плоскости β (пункт 15).

18.Объем треугольной пирамиды.

Объем пирамиды ABCD,
пусть $\overrightarrow{AB} = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\overrightarrow{AC} = \{x_2; y_2; z_2\}$, $\overrightarrow{AD} = \{x_3; y_3; z_3\}$

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

19. Алгоритм нахождения площади сечения:

$$S_{сечения} = \frac{S_{проекции}}{\cos\varphi}$$

1) Составьте уравнение сечения;

2)Составьте уравнение плоскости (z =0);

3)Найдите нормальные вектора плоскостей;

4)Найдите косинус угла между данными нормальными векторами;

5)Найдите площадь проекции;

6)Поставьте все полученные данные в формулу.