13. а) Решите уравнение $6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0.$

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi].$

Решение. а) Сделаем замену $\cos x = y$, получим квадратное уравнение $6y^2 - 7y - 5 = 0$, корнями которого являются числа $y = -\frac{1}{2}$ и $y = \frac{5}{3}$. Уравнение $\cos x = \frac{5}{3}$ не имеет решений, а из уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ находим корни $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ или $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

б) Найдем корни, принадлежащие отрезку $[-\pi;\ 2\pi]$. Решим неравенства:

$$-\pi \leqslant -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leqslant 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leqslant k \leqslant \frac{4}{3},$$ откуда $k = 0$ или $k = 1.$

$$-\pi \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leqslant 2\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{6} \leqslant k \leqslant \frac{2}{3} \Leftrightarrow k = 0.$$

Соответствующие найденным значениям параметров корни: $-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}.$

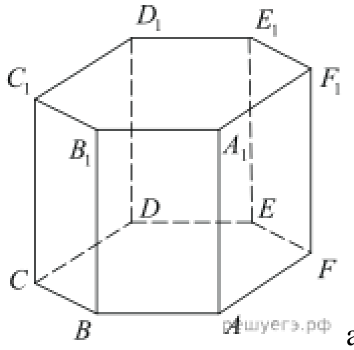
Ответ: а) $\left\{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}.$

Ответ: а) $\left\{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}.$

14. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ стороны основания равны 5, а боковые рёбра равны 11.

а) Докажите, что прямые CA_1 и C_1D_1 перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины C, A_1 и F_1.



Решение. а) Поскольку $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная шестиугольная призма, то $ABCDEF$ — правильный шестиугольник. Тогда $\angle CBA = 120°$.

По теореме косинусов имеем

$$CA^2 = 2 \cdot 25 + 2 \cdot 25 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow CA = 5\sqrt{3}.$$

Заметим, что $A_1A \perp (ABC)$, следовательно, $AA_1 \perp CA$. По теореме Пифагора $CA_1 = 14$.

Поскольку $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, $DA = 2AB = 10$. Тогда $DA_1 = \sqrt{221}$. По теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник CA_1D — прямоугольный. Тогда $CD \perp CA_1$. Поскольку $C_1D_1 \parallel CD$, имеем $C_1D_1 \perp CA_1$.

б) Поскольку $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, $AC \perp CD$, поэтому угол A_1CA равен углу между искомым сечением и плоскостью $ABCDEF$. Так как $A_1A \perp CA$, $\cos A_1CA = \frac{5\sqrt{3}}{14}$.

Площадь шестиугольника равна

$$S_{ABCDEF} = \frac{25\sqrt{3}}{4} \cdot 6 = \frac{75\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда, по теореме о площади проекции, площадь искомого сечения

$$S = \frac{S_{ABCDEF}}{\cos \angle A_1CA} = \frac{\frac{75\sqrt{3}}{2}}{\frac{5\sqrt{3}}{14}} = 105.$$

Ответ: б) 105.

Примечание. Пункт а), конечно, можно доказать и проще, сославшись на теорему о трех перпендикулярах. Проекцией прямой CA_1 на плоскость верхнего основания является прямая C_1A_1, перпендикулярная прямой C_1D_1.

Ответ: б) 105.

15. Решите неравенство:

$$\frac{x^2-6x+8}{x-1} - \frac{x-4}{x^2-3x+2} \leqslant 0.$$

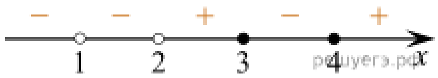
Решение. Перепишем неравенство в виде:

$$\frac{x^2-6x+8}{x-1}-\frac{x-4}{x^2-3x+2}\leqslant 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x-2)}{x-1}-\frac{x-4}{(x-2)(x-1)}\leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2(x-4)-(x-4)}{(x-2)(x-1)}\leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{((x-2)^2-1)(x-4)}{(x-2)(x-1)}\leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(x-2)(x-1)}\leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-3)(x-4)}{x-2}\leqslant 0, \\ x\neq 1. \end{cases}$$



Множество решений исходного неравенства: $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ 2)\cup[3;\ 4]$.

Ответ: $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ 2)\cup[3;\ 4]$.

16.В июле планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составила 27 млн рублей?

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составила 27 млн рублей?

Решение. По формуле для переплаты П при выплате суммы кредита $S = 18$ млн рублей дифференцированными платежами имеем:

$$\Pi = \frac{n+1}{200} rS,$$

где n — искомое число лет, а $r = 10$ — величина платежной ставки в процентах (см. Гущин Д. Д. «Встречи с финансовой математикой»; для получения полного балла доказательство этих формул необходимо приводить на экзамене). По условию, переплата П равна $27 - 18 = 9$млн рублей

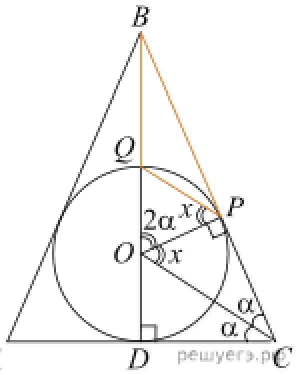
$$9 = \frac{n+1}{2} \cdot 0{,}1 \cdot 18,$$

откуда $n = 9$.

17. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке P и пересекает отрезок BO в точке Q. При этом отрезки OC и QP параллельны.

а) Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника BQP, если точка O делит высоту BD треугольника в отношении $BO : OD = 3 : 1$ и $AC = 2a$.



Решение. Пусть луч BO пересекает сторону AC в точке D. Введем следующие обозначения: $\angle BCO = \angle DCO = \alpha$, $\angle COP = x$. Прямые OC и QP параллельны, а углы COP и OPQ — накрест лежащие при пересечении прямых PQ и OC секущей OP, следовательно, $\angle OPQ = x$. Далее, из прямоугольного треугольника OPC находим $x = \frac{\pi}{2} - \alpha,$ а из равнобедренного треугольника OPQ находим $\angle POQ = \pi - 2x = 2\alpha$. Таким образом, треугольники BOP и BCD подобны, и, значит, биссектриса BD треугольника ABC является его высотой, откуда следует, что треугольник ABC — равнобедренный треугольник, что и требовалось доказать.

б) Отрезок CO — биссектриса треугольника BCD, следовательно:

$$\frac{DC}{BC} = \frac{OD}{OB} = \frac{1}{3},$$

откуда $BC = 3DC = 3a$.

Далее $CP = DC = a$, значит, $BP = 2a$ и, следовательно, $S_{\Delta BPO} = 2S_{\Delta CPO} = S_{CPOD}$. Откуда

$$S_{\Delta BOP} = \frac{1}{2}S_{\Delta BCD} = \frac{1}{4}S_{\Delta ABC}. BQ = \frac{2}{3}BO,$$

следовательно $S_{\Delta BQP} = \frac{2}{3}S_{\Delta BOP} = \frac{1}{6}S_{\Delta ABC}$.

По формуле Герона находим: $S_{\Delta ABC} = \sqrt{4a \cdot 2a \cdot a \cdot a} = 2\sqrt{2}a^2$. Значит, $S_{\Delta BQP} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

Приведем решение пункта б) Данила Касьяненко.

По условию $BO : OD = 3 : 1$, тогда $BQ = QD$, так как $DO = OQ$. Проведем через точку Q прямую, параллельную прямой AC, пусть она пересечет сторону BC в точке N.

Тогда QN — средняя линия треугольника BDC, поэтому $QN = \frac{DC}{2} = \frac{a}{2}$, а $BN = CN$.

По свойству касательных $NP = QN = \frac{a}{2}$ и $CP = DC = a$, тогда $BN = CN = \frac{3a}{2}$.

Из прямоугольного треугольника BQN найдем BQ:

$$BQ = \sqrt{BN^2 - QN^2} = \sqrt{\frac{9\mathrm{a}^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{2}\mathrm{a}.$$

Проведем QT перпендикулярно CB. Из прямоугольного треугольника BQN найдем QT:

$$QT = \frac{BQ \cdot QN}{BN} = \frac{\sqrt{2}a \cdot \frac{a}{2}}{\frac{3a}{2}} = \frac{\sqrt{2}a}{3}.$$

Найдем площадь треугольника BQP:

$$S_{\Delta BQP} = \frac{1}{2} \cdot BP \cdot QT = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{2}a}{3} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}.$$

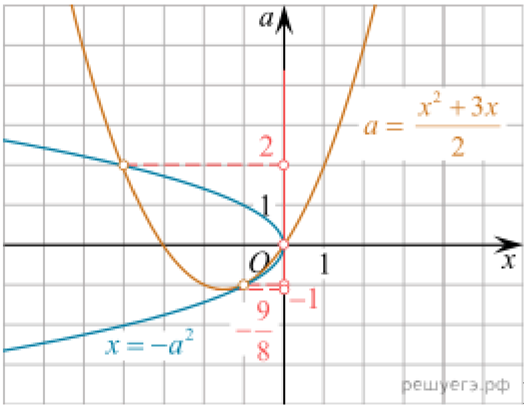
18. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

$$\frac{2a - x^2 - 3x}{x + a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение. Заметим, что

$$\frac{2a - x^2 - 3x}{x + a^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - x^2 - 3x = 0, \\ x + a^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{x^2 + 3x}{2}, \\ x \neq -a^2 \end{cases}$$



Изобразим решение в системе координат *xOa*. Графиком системы, а значит, и графиком исходного уравнения является парабола с выколотыми точками.

Ординаты точек пересечения парабол $a = \dfrac{x^2 + 3x}{2}$ и $x = -a^2$ найдём из уравнения $a = \dfrac{a^4 - 3a^2}{2}$.

$$a^4 - 3a^2 - 2a = 0;$$

$$a(a^3 - 3a - 2) = 0;$$

$$a(a+1)(a^2 - a - 2) = 0;$$

$$a(a+1)^2(a-2) = 0.$$

Получаем $a = -1$ или $a = 0$ или $a = 2$.

Вершина параболы $a = \dfrac{x^2 + 3x}{2}$ в точке $\left(-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{9}{8}\right)$

Ровно два решения исходное уравнение имеет при $-\frac{9}{8} < a < -1$, $-1 < a < 0$, $0 < a < 2$, $a > 2$.

Ответ: $a \in \left(-\frac{9}{8};\ -1\right) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

19. На доске написано 100 различных натуральных чисел с суммой 5100.

а) Может ли быть записано число 250?

б) Можно ли обойтись без числа 11?

в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 11, может быть на доске?

Решение. а) Пусть на доске написано число 250 и 99 других различных натуральных чисел. Минимально возможная сумма чисел на доске достигается при условии, что сумма 99 различных натуральных чисел минимальна. А это, в свою очередь, возможно, если 99 различных натуральных числа - арифметическая прогрессия с первым членом $a_1 = 1$ и разностью $d = 1$. Сумма S_{99} этих чисел, по формуле суммы арифметической прогрессии, составит:

$$S_{99} = \frac{1+99}{2} \cdot 99 = 4950$$

Сумма всех чисел на доске *S* будет равна:

$$S = S_{99} + 250 = 4950 + 250 = 5200$$

Не трудно заметить, что полученная сумма больше, чем 5100, а это значит, что и любая сумма 100 различных натуральных чисел, среди которых есть 250, больше 5100, следовательно, числа 250 на доске быть не может.

б) Пусть на доске не записано число 11. В таком случае, минимально возможная сумма *S* чисел на доске будет состоять из двух сумм арифметических прогрессий: суммы S_1 первых 10 членов прогрессии с первым членом $a_1 = 1$, разностью $d = 1$ (то есть ряда 1,2,3,..10) и суммы первых 90 членов прогрессии с первым членом $a_1 = 12$, разностью $d = 1$ (то есть ряда 12,13,14,..101). Найдем эту сумму:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1+10}{2} \cdot 10 + \frac{12+101}{2} \cdot 90 = 55 + 5085 = 5140$$

Не трудно заметить, что полученная сумма больше, чем 5100, а это значит, что и любая сумма 100 различных натуральных чисел, среди которых нет 11, больше 5100, следовательно, без числа 11 на доске обойтись нельзя.

в) Допустим, что на доске выписаны все числа от 1 до 100. Тогда получается, что полученный ряд составляет арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 1$, разностью $d = 1$. По формуле для суммы арифметической прогрессии найдем сумму S_0 всех чисел на доске

$$S_0 = \frac{1+100}{2} \cdot 100 = 5050.$$

Полученная сумма не удовлетворяет условию задачи. Теперь, чтобы увеличить сумму всех чисел, написанных на доске до обозначенной в условии, попробуем заменить числа, кратные 11 на другие числа, следующие за сотней: 77 заменим на 103, 88 на 102, а 99 на 101. Полученная сумма S будет равна:

$$S = S_0 - (77+88+99) + (103+102+101) = 5092.$$

Подправим сумму S: заменим число 101 на число 109, окончательно получим:

$$S = 5092 - 101 + 109 = 5100.$$

При дальнейшей замене чисел, кратных 11 на числа, большие 100, сумма будет увеличиваться и не соответствовать условию задачи. Таким образом, наименьшее количество чисел, кратных 11 равно 6.

Приведем другое решение пункта в).

Приведем пример, когда на доске написано шесть чисел, кратных 11 (11, 22, 33, 44, 55, 66):

1, 2, ... , 76, 78, 79, ... , 87, 89, 90, ... , 98, 100, 101, 102, 103.

Докажем, что на доске не может быть меньше шести чисел, делящихся на 11 без остатка. Чтобы убрать максимальное количество чисел, кратных 11, необходимо, чтобы разности между новыми и старыми числами были минимальны. То есть заменять надо наибольшие числа, кратные 11, на наименьшие возможные числа, большие ста. Пусть количество чисел, кратных 11, равно 5. Тогда минимальная сумма записанных на доске чисел равна:

$$S = \\ = 1+2+ \ldots +65+67+ \ldots +76+78+ \ldots +87+89+ \ldots +98+100+ \ldots 104 = \\ = 5130.$$

Полученная сумма больше, чем 5100. При дальнейшей замене чисел, кратных 11, на числа, большие 100, сумма будет увеличиваться, значит, на доске не может быть меньше шести чисел, кратных 11.

Ответ: а) Нет; б) Нет; в) 6.

Ответ: а) Нет; б) Нет; в) 6.